Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté des Sciences de Tétouan

OPTIMISATION DES SYSTEMES ENERGETIQUES

Taib AJZOUL
Professeur au Département de Physique
Faculté des Sciences de Tétouan

CHAPITRE I :

OPTIMISATION LINEAIRE

A PLUSIEURS VARIABLES

Introduction

- De nombreux problèmes se ramènent à la problématique suivante :
- « Des ressources, disponibles en quantité limitée, doivent être utilisées à diverses activités envisageables de façon à retirer le plus grand profit possible de cette utilisation »

Dans cette problématique on peut identifier quelques mots-clés :

Les niveaux d’activité	➡	Ce sont des variables de décision
Les ressources disponibles	➡	Ce sont des contraintes
La meilleure utilisation	➡	Nous avons à résoudre un problème d’optimisation

I. PROBLEME D'OPTIMISATION

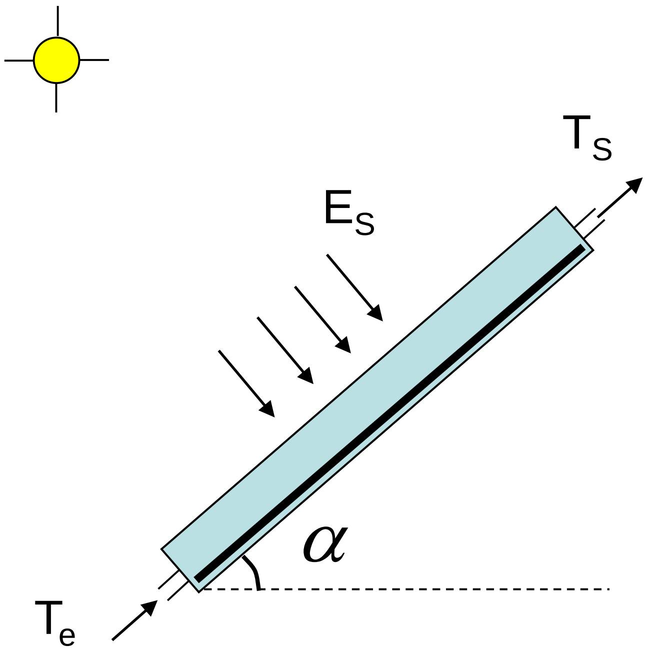
Un problème d'optimisation consiste en la détermination d'un ensemble de variables, reliées entre elles par un modèle et des contraintes, qui extrémalise un critère.

Minimum

Extremum

Maximum

Exemple de problème d'optimisation : Cas d'un capteur solaire



Variables (coût, surface et inclinaison) : C, S, α

Modèle : $T_S = f(T_e, E_S, U_P, C, S, \alpha)$

Contraintes $\begin{cases} C < C_{\max} \\ S_{\min} < S < S_{\max} \\ \alpha_{\min} < \alpha < \alpha_{\max} \end{cases}$

Critère (Rendement du capteur) : $\eta = \eta(C, S, \alpha)$

Problème d'optimisation (Extremum) : $\underset{C,S,\alpha}{Max}\, \eta$

- Dans ce cours nous étudions les méthodes d'optimisation statique. Cependant, d'un point de vue numérique, un problème d'optimisation formulé de façon dynamique peut être résolu par utilisation de méthodes statiques après discrétisation.
- La classification des problèmes d'optimisation se fait à partir de la forme
  - du critère,
  - des contraintes
  - du domaine dans lequel les variables d'optimisation sont définies
- Classification : problème linéaire, problème non linéaires, problème sans contraintes, problème avec contraintes, …

II. FORMULATION MATHEMATIQUE D'UN PROBLEMED'OPTIMISATION LINEAIRE:

La programmation linéaire (optimisation linéaire) est une technique mathématique qui permet de trouver les niveaux des différentes activités (variables X) qui donnent la meilleure utilisation (minimisation d’un critère z) de l’ensemble des ressources disponibles (contraintes).

II. FORMULATION MATHEMATIQUE D'UN PROBLEME D'OPTIMISATION LINEAIRE:

II -1. Formulation standard

Soit $D \subset R^n$ le domaine des variables x telles que :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \qquad (n \text{ variables})$$

On dira que le problème linéaire a une formulation standard si x minimise la forme linéaire :

$$\begin{cases} Min\ z = \underset{x}{Min} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \longrightarrow \text{Critère d'optimisation} \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \ldots, m & \longrightarrow \text{m Contraintes égalités} \end{cases}$$

La formulation équivalente matricielle s'écrit :

$$\begin{cases} Min\ c^T x \\ x \geq 0 \\ Ax = b \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} x \in R^n \\ A \in M_{m \times n}\ ;\ rang\ A = m \\ b = \left[b_1, \dots, b_m\right]^T \in R^m \\ D = \left\{x;\ x \geq 0\ et\ Ax = b\right\} \end{cases} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemple

Problème standard dans le cas :

- De 3 variables
- De 2 contraintes égalités

$$\begin{cases} Min\ z = \underset{x_1, x_2, x_3}{Min} \sum_{j=1}^{n=3} c_j x_j = \underset{x_1, x_2, x_3}{Min} \left(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3\right) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{n=3} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2 \quad \Rightarrow \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \end{cases} \end{cases}$$

La formulation équivalente matricielle s'écrit :

$$\begin{cases} Min\ c^T x \\ x \geq 0 \\ Ax = b \end{cases} \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

II-2. Formulation non standard

La résolution d'un problème linéaire nécessite sa mise sous forme standard

II-2.a. Cas des contraintes inégalités

Si on a des contraintes inégalités de type :

$$Ax \leq b \qquad ou \qquad Ax \geq b$$

On introduit des variables d'écart dans les contraintes :

$$Ax + e = b \qquad \text{ou} \qquad Ax - e = b$$

avec $\begin{cases} e \geq 0 \\ e \in R^m \end{cases}$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$$

S'il y a *m* contraintes inégalités au départ, la nouvelle dimension du problème linéaire est (n+m).

En écriture matricielle on aura:

$$z = \left[C^T \, : 0 \right] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

et

$$\left[A : 1 \right] \begin{bmatrix} x \\ \ldots \\ e \end{bmatrix} = b$$

II-2-b. Cas d'un maximum

Si on a un maximum à déterminer

$$-Min\left[-z(x)\right] = Max\left[z(x)\right]$$

II-2-c. Cas où les variables ont des bornes supérieures

Si les variables ont des bornes supérieures, on introduit des variables d'écart :

$$\begin{cases} Min\, C^T x \\ Ax = b \\ 0 \le x \le h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Min\, C^T x \\ Ax = b \\ x + y = h \\ x \ge 0 \quad ; \quad y \ge 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

II-2-d. Cas où la condition $x \geq 0$ n'est pas précisée

Si la condition $x \geq 0$ n'est pas précisée, on pose :

$$x = x^{+} - x^{-} \qquad avec \qquad x^{+} \geq 0 \quad et \quad x^{-} \geq 0$$

$$\begin{cases} Ax = b & \Rightarrow \left[A : -A\right] \begin{bmatrix} x^{+} \\ \ldots \\ x^{-} \end{bmatrix} = b \\ z = C^{T} x & \Rightarrow z = C^{T} \left[x^{+} : -x^{-}\right] \end{cases}$$

Il suffit de prendre

$$x^{+} = \max(x, 0)$$

?

$$x^{-} = -\min(x, 0)$$

Dans ce dernier cas on a doublé la dimension du problème (2n).

II-3. Solution acceptable de base (Forme simpliciale)

Considérons la forme standard particulière :

$$Ax = b \qquad \Rightarrow \qquad [B:H]\begin{bmatrix} x^B \\ x^H \end{bmatrix} = b \quad avec \quad A = [B:H] \quad et \quad x = \begin{bmatrix} x^B \\ x^H \end{bmatrix}$$

Si B est non singulière $\qquad \Rightarrow \qquad [1:B^{-1}H]\begin{bmatrix} x^B \\ x^H \end{bmatrix} = B^{-1}b$

$(Dét\ B \neq 0)$

C'est de la forme $\qquad [1:R]\begin{bmatrix} x^B \\ x^H \end{bmatrix} = b^s \quad avec \quad \begin{cases} R = B^{-1}H \\ b^s = B^{-1}b \end{cases}$

x^B est constitué des variables de base.

x^H est constitué des variables hors base.

Alors : $\begin{cases} x^B = b^s \\ x^H = 0 \end{cases}$

est une solution acceptable de base si

$$b_j^s \geq 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots, m.$$

Critère correspondant à la solution de base

$$z = c^{B^T} b^s + (c^{H^T} - c^{B^T} R) x^H$$

Si $x^H = 0$

$$z = c^{B^T} B^{-1} b = c^{B^T} b^s$$

Exemple :
Matrice de base et matrice hors base

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \end{cases}$$

La forme standard fait apparaître une matrice A qui peut se décomposer en deux sous-matrices H et B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}:$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B est la matrice de base :

==================

- les colonnes de B sont des colonnes unités
- sont linéairement indépendantes
- forment une base de l'espace vectoriel des colonnes à 3 élements
- les variables associées aux colonnes de B sont des variables de base

H est la matrice hors base :

======================

- les variables associées aux colonnes de H sont des variables hors base

II-3-a. Introduction de variables artificielles

On obtient directement une forme simpliciale si les conditions sont de types inégalité :

$$Ax \leq b$$

soit

$$Ax + 1e = b \qquad ; \qquad e \geq 0$$

ce qui donne :

$$[1 : A]\begin{bmatrix} e \\ \dots \\ x \end{bmatrix} = b$$

La solution de base dans ce cas est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ e = b \end{cases}$$

Exemple :

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6$$

Introduction de variables artificielles $x_4,\ x_5,\ x_6$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solution de base dans ce cas est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ e = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \\ x_4 = 0, \quad x_5 = 5, \quad x_6 = 6 \end{cases}$$

II-3-b. Méthode générale

Lorsqu'une forme simpliciale n'est pas évidente, on utilise le nouveau problème linéaire suivant:

$$\begin{cases} Ax + e = b \quad ; \quad e \geq 0 \\ c^T x = z \\ w = \sum_{i=1}^{m} e_i \end{cases}$$

On obtient ainsi une solution de base du problème initial en résolvant le nouveau problème précédent, avec les deux première équations qui constituent les contraintes est la dernière égalité qui forme le critère.

Alors à l'optimum:

$w = 0 \Rightarrow$ l'existence d'une base pour le problème initial

$w > 0 \Rightarrow$ la non existence de la base.

II-4. Passage d'une solution acceptable de base à une autre

Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_m, 0, ..., 0)$ une solution de base :

$$x = \begin{bmatrix} x^B \\ ... \\ x^H \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \begin{cases} x^B = b^s = B^{-1}b \\ x^H = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs A_i, $i \geq m+1$ sont les vecteurs hors base.

Pour passer de X à une autre solution $\hat{X}$, on fait rentrer dans la base un vecteur A_i, $i \geq m+1$ et fait sortir de la base un vecteur A_i, $i \leq m$

,

On fait la même chose pour les x_i correspondants (changement de pivot).

Supposons que le système initial soit sous forme simpliciale standard ; on peut dresser le tableau suivant:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
A_1 & A_2 & \cdots & A_p & \cdots & A_m & A_{m+1} & A_{m+2} & \cdots & A_q & \cdots & A_n & \\
x_1 & x_2 & \cdots & x_p & \cdots & x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \cdots & x_q & \cdots & x_n & b \\
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & y_{1,m+2} & \cdots & y_{1,q} & \cdots & y_{1,n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_{2,m+1} & y_{2,m+2} & \cdots & y_{2,q} & \cdots & y_{2,n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & y_{p,m+1} & y_{p,m+2} & \cdots & y_{p,q} & \cdots & y_{p,n} & b_p \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & y_{m,m+2} & \cdots & y_{m,q} & \cdots & y_{m,n} & b_m
\end{array}
$$

Pour faire sortir x_p des variables de base et rentrer $x_q (q > m+1)$ dans la base (ceci est possible si $y_{pq} \neq 0)$, on divise la p$^{\text{ième}}$ ligne par y_{pq} et on retranche des multiples de la ligne p aux autres lignes de façon à donner au coefficient de x_q la valeur 0 dans ces lignes. Ainsi la q$^{\text{ième}}$ colonne du tableau a un 1 sur la p$^{\text{ième}}$ ligne et 0 ailleurs.

On a de façon explicite pour les coefficients $y'_{i,j}$ du nouveau tableau:

Equations de pivot
$$\begin{cases} y'_{i,j} = y_{i,j} - \dfrac{y_{p,j}}{y_{p,q}} y_{i,q} \quad ; \quad i \neq p \\ \\ y'_{p,j} = \dfrac{y_{p,j}}{y_{p,q}} \quad ; \quad i = p \end{cases}$$

$y_{p,q}$ est le pivot

x_q est la variable qu'on fait rentrer dans la base.

Pour déterminer celle des variables de base qui va sortir, on calcul donc les valeurs :

$$\frac{x_i}{x_{iq}} = \frac{b_i}{y_{iq}} \qquad i = 1, \ldots, m \qquad et \qquad y_{iq} > 0$$

et on choisit le x_i correspondant à la plus petite valeur .

II-5. Algorithme du simplexe

Considérons la forme simpliciale

$$\left[1:R\right]\begin{bmatrix} x^{B} \\ \dots \\ x^{H} \end{bmatrix} = b^{s}$$

et

$$z = c^{B^T} b^{s} + (c^{H^T} - c^{B^T} R)x^{H}$$

La solution de base est telle que :

$$\begin{cases} x^{B} = b^{s} \\ x^{H} = 0 \end{cases}$$

et

$$z = \overline{z} + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j x_j^{H}$$

Théorème 1

Si $\alpha_j < 0$ et si le vecteur A_j correspondant $(j \geq m+1)$ est introduit dans la base initiale pour donner une nouvelle solution acceptable, celle-ci est telle que $z < \overline{z}$.

S'il existe plusieurs $\alpha_j < 0$, on introduit dans la base précédente le A_j tel que α_j est le plus négatif.

Théorème 2

Etant donné une solution de base associée à une base B, une condition nécessaire est suffisante pour que cette solution soit optimale est que pour tout $j \in H$ on a $\alpha_j \geq 0$.

La solution optimale est alors:

$$\begin{cases} x^B = b^s \\ x^H = 0 \quad ; \quad z = \overline{z} \end{cases}$$

Exemple

Résoudre : $Min\ z = Min\,(-3x_1 - x_2 - 3x_3)$

Avec
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

On rappelle d'abord le passage d'une base à l'autre :

$$y'_{i,j} = y_{i,j} - \frac{y_{p,j}}{y_{p,q}} y_{i,q} \quad ; \quad i \neq p$$

$$y'_{p,j} = \frac{y_{p,j}}{y_{p,q}} \quad ; \quad i = p$$

$$\alpha'_j = \alpha_j - \frac{y_{q,j}}{y_{p,q}} \alpha_q$$

On donne ensuite la formulation standard du problème. Pour cela on introduit les variables d'écart :

$$x_4, x_5, x_6 \quad (x_i \geq 0 \quad ; \quad i = 4,5,6)$$

Ce qui donne:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\ z = -3x_1 - x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

On forme le tableau :

$$\begin{array}{ccccccc}
A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & b \\
\\
\ldots & \ldots & y_{ij} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & -z
\end{array}$$

Cela donne:

Tableau n°1

2	1	1	1	0	0	2
1	2	3	0	1	0	5
2	2	1	0	0	1	6
–3	–1	–3	0	0	0	0

Car $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\ z = -3x_1 - x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

La solution de base est donnée par :

$$\begin{cases} x_4 = 2 \\ x_5 = 5 \\ x_6 = 6 \\ x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

α_1 *et* α_3 sont les coefficients les plus négatifs, on fait entrer, par exemple, x_3 dans la base.

Tableau n°1

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
-3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \\
\alpha_1 & & \color{red}{\alpha_3} & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & A_3 & & & & b \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Dans la colonne A_3 on calcule les coefficients $\dfrac{x_i}{y_{i3}} = \dfrac{b_i}{y_{i3}}$

On obtient
$$\begin{cases} \dfrac{2}{1} = 2 \quad pour \quad i = 4 \quad (car \quad x_4 = 2) \\ \dfrac{5}{3} \quad pour \quad i = 5 \quad (car \quad x_5 = 5) \\ \dfrac{6}{1} = 6 \quad pour \quad i = 6 \quad (car \quad x_6 = 6) \end{cases}$$

On choisit le x_i correspondant à la plus faible valeur (5/3 est la valeur la plus faible). C'est donc x_5 qu'on fait sortir de la base.

Pivot

Tableau n°1

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
1 & 2 & \{3\} & 0 & 1 & 0 & 5 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\
-3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \\
\alpha_1 & & \alpha_3 & & & &
\end{array}$$

Exemple de calcul de y_{32}

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & \{3\} & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$y_{32} = \frac{2 \times 3 - 2 \times 1}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$$

Le pivot est $y_{23} = 3$ et le calcul des $y_{ij}^{'}$ et des $\alpha_j^{'}$ donne :

Tableau n°2

$$
\begin{array}{ccccccc}
\left\{\dfrac{5}{3}\right\} & \dfrac{1}{3} & 0 & 1 & \dfrac{-1}{3} & 0 & \dfrac{1}{3} \\
\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & 1 & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & \dfrac{5}{3} \\
\dfrac{5}{3} & \dfrac{4}{3} & 0 & 0 & \dfrac{-1}{3} & 1 & \dfrac{13}{3} \\
-2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5
\end{array}
$$

$\alpha_1 = -2$ est le coefficient le plus négatif, on fait entrer x_1 dans la base.

La solution de base est donnée par :

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{5}{3} \\ x_4 = \dfrac{1}{3} \\ x_6 = \dfrac{13}{3} \\ x_1 = x_2 = x_5 = 0 \\ \\ z = -5 \end{cases}$$

Ensuite, dans la colonne A_1 on calcul les coefficients :

$$\frac{x_i}{y_n} = \frac{b_i}{y_n}$$

On obtient
$$\begin{cases} \dfrac{1/3}{5/3} = 1/5 & pour \quad i = 4 \\ \dfrac{5/3}{1/3} = 5 & pour \quad i = 3 \\ \dfrac{13/3}{5/3} = 13/5 & pour \quad i = 6 \end{cases}$$

1/5 est la valeur la plus faible, on fait donc sortir de la base x_4 $(i = 4)$.

Pivot

Tableau n°2

$$
\begin{array}{ccccccc}
\left\{\frac{5}{3}\right\} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\
\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 1 & \frac{13}{3} \\
-2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5
\end{array}
$$

Le nouveau pivot est $y_n = \frac{5}{3}$ et le calcul des y'_{ij} et des x'_j donne :

Tableau n° 3

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\
0 & \frac{3}{5} & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{8}{5} \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\
0 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{27}{5}
\end{array}$$

Tous les coefficients α_i sont positifs. La solution optimale est donc :

$$\begin{cases} x_1 = 1/5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 8/5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 4 \end{cases} \qquad z = -\frac{27}{5}$$

Remarque

Si dans la dernière phase, une variable hors base x_i a son coefficient α_i =0 (dernière ligne du tableau), il existe au mois une autre solution optimale.