Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté des Sciences de Tétouan

Master Spécialisé
Génie Énergétique et Environnement

OPTIMISATION DES SYSTEMES ENERGETIQUES

CHAPITRE III :
METHODES ITERATIVES POUR LA RECHERCHE D'OPTIMUM

Taib AJZOUL
Professeur au Département de Physique
Faculté des Sciences de Tétouan

VI. METHODES ITERATIVES POUR LA RECHERCHE D'OPTIMUM

VI-1. Principe

Nous considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\underset{x}{Min}\, f(x) \quad ; \quad x \in R^n$$

Les méthodes itératives pour la recherche d'optimum, consistent , partant d'une donnée initiale x^0, à construire une suite :

$$x^1, x^2, \ldots., x^i, \ldots, \hat{x}$$

telle que

$$f(x^0) > f(x^1) > f(x^2) > \ldots > f(x^i) > \ldots > f(\hat{x})$$

$\hat{x}$ est un minimum de f

Les divers types de génération des x^i conduisent à divers types de méthodes. Le principe commun est le suivant :

$$x^{i+1} = x^i + \mu_i p_i$$

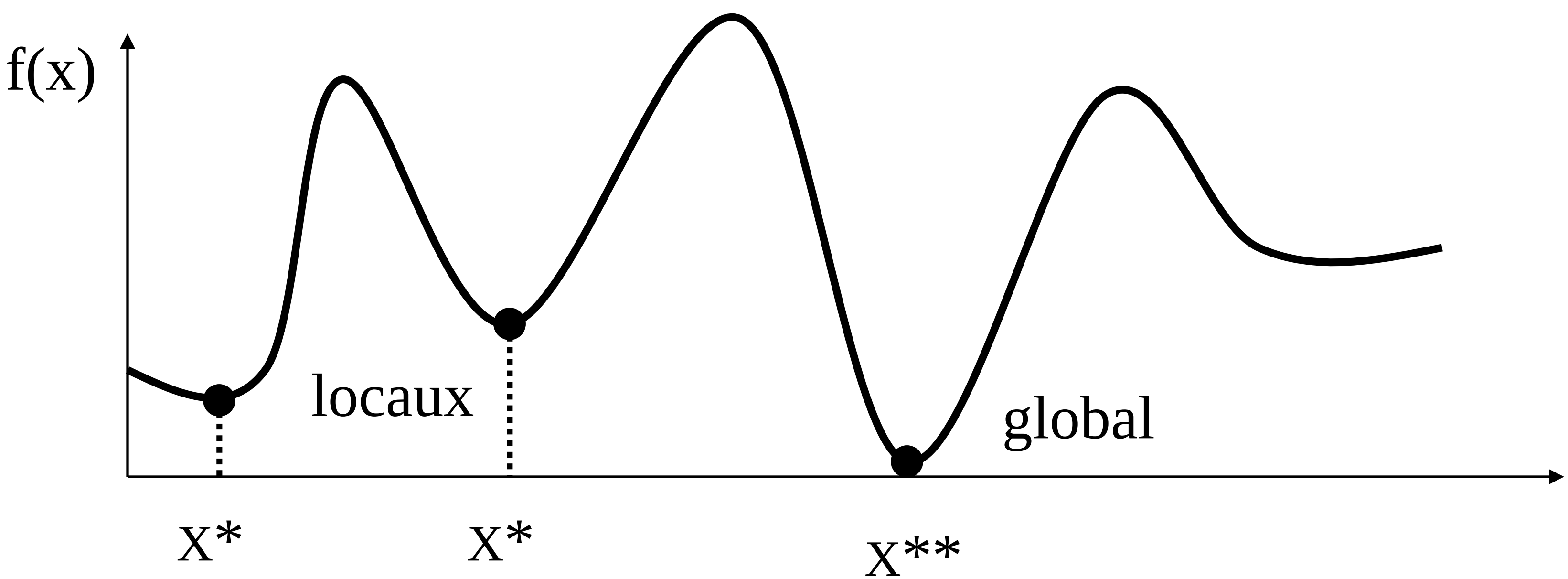
μ_i est le coefficient de recherche $(\mu_i \in R^+)$.

p_i est la direction de recherche $(p_i \in R^n)$.

Dans le cas de problèmes d'optimisation avec contraintes $(x \in D \neq R^n)$, les éléments de la suite x_i satisferont ces contraintes par un choix convenable de μ_i et p_i .

D'autre part, les méthodes itératives convergent vers un minimum local . D'un point de vue pratique, le choix de l'initialisation x^0 sera important .

- Minimum global $f(x^{**}) \le f(x)$
- Minimum local $f(x^{*}) \le f(x)$



VI-2. Exemple de méthodes itératives

VI-2-a. Méthode du gradient

La méthode du gradient est parmi les méthodes de descente les plus simples. L'algorithme est donné par :

$$\boxed{x^{i+1} = x^{i} - \mu f_x(x^{i})}$$

Comme dans le cas général $x^{i+1} = x^{i} + \mu_i p_i$

On a donc

$\mu_i = \mu = c^{te}$: coefficient de recherche.

$p_i = -f_x(x^i)$: direction de recherche.

Convergence de la méthode du gradient :

Il y aura convergence de la méthode du gradient si

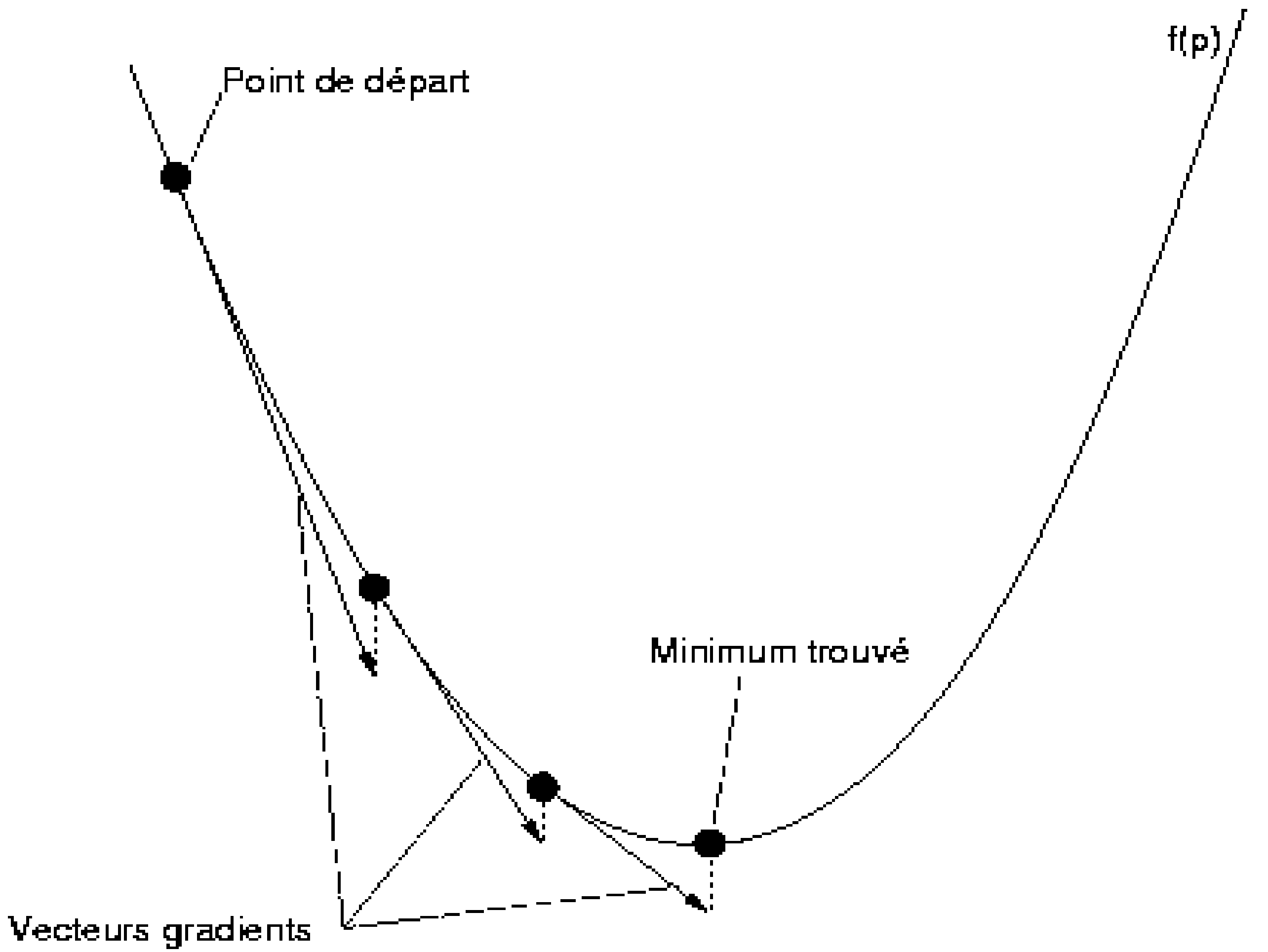
$$\left[1 - \mu f_{xx}(\hat{x})\right]$$

a ses valeurs propres en module inférieures à 1.

Méthode de gradient dans le cas d'une fonction à une variable

L'algorithme d'optimisation le plus simple est la descente de gradient, dont le principe est de partir d'un point aléatoire puis de se déplacer dans la direction du gradient. En appliquant un certain nombre d'itérations, l'algorithme converge vers une solution qui est un minimum local de f.

Méthode de gradient dans le cas d'une fonction à une variable



LES LIMITES DE L’OPTIMISATION PAR LA METHODE DE GRADIENT

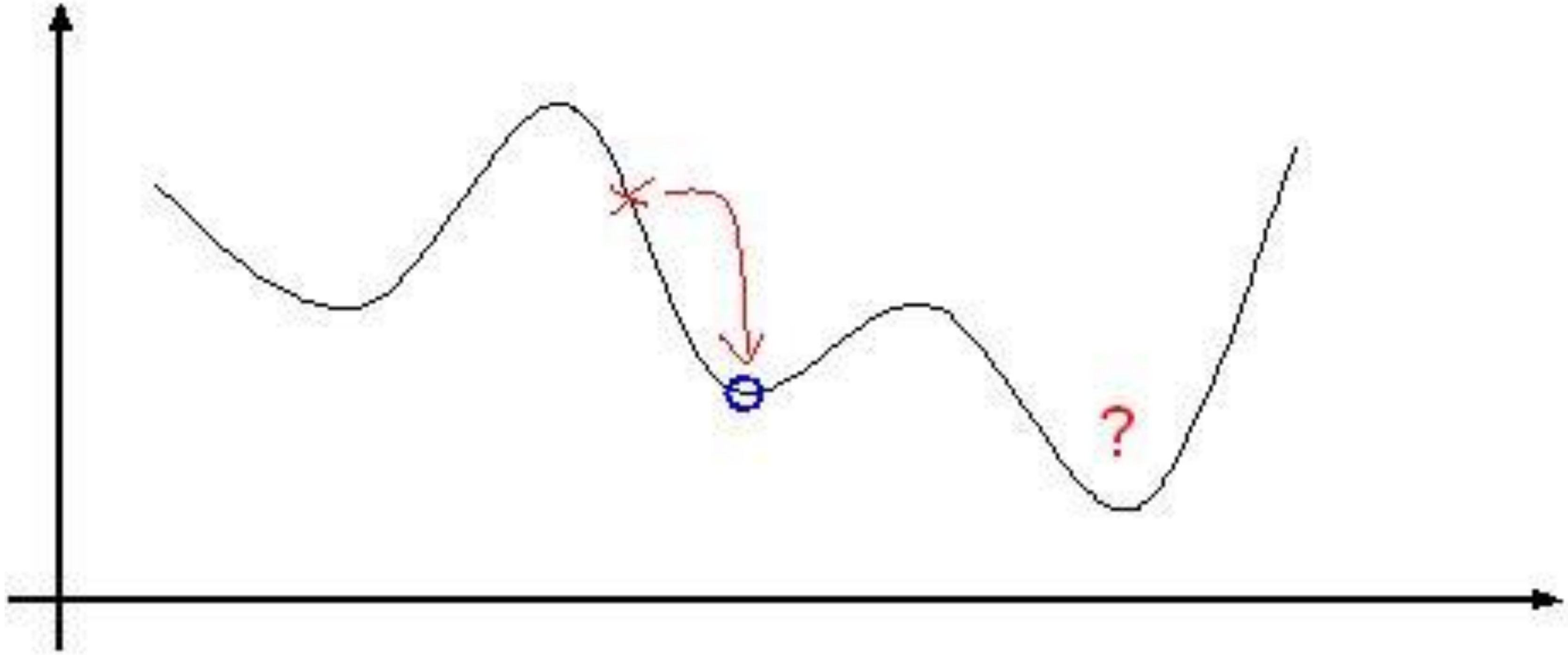
Cette méthode possède des inconvénients bien connus :

1. le choix de μ est empirique,

2. si μ est trop petit, le nombre d'itérations peut être très élevé,

3. si μ est trop grand, les valeurs de la suite risquent d'osciller autour du minimum sans converger,

4. rien ne garantit que le minimum trouvé est un minimum global.



Limite de la Méthode du gradient

VI-2-b. Méthode du gradient simplifié

La méthode du gradient simplifié est utilisée pour réduire le volume de calcul.

On utilise :

$$\boxed{x^{i+1} = x^{i} - \mu f_{x}(x^{i})}$$

Dans cette méthode le gradient n'est pas calculé à chaque itération mais chaque fois que la progression dans la direction du dernier gradient calculé conduit à une augmentation de f(x).

On obtient ainsi une méthode zigzagante

VI-2-c. Méthode de la plus grande pente

Nous utilisons le théorème suivant pour établir cette méthode :

Théorème de Polak

Pour f continue et à dérivée continue tout algorithme de classe :

$$x^{i+1} = x^{i} + \mu_i p_i \quad \mu_i \in R^{+} \quad p_i \in R^{n}$$

où μ_i *et* p_i sont tels que :

$$\text{i) } \exists \alpha \,\Big|\, -f_x^{T}(x^{i})p_i \geq \alpha \left\| f_x(x^{i}) \right\| . \left\| p_i \right\| \qquad , \forall i$$

et

$$\text{ii) } \mu_i = \inf \left\{ \mu \,\Big|\, \mu \geq 0,\ f_x^{T}(x^{i} + \mu p_i) p_i = 0 \right\}$$

définit une suite $\left\{ x_n \right\}$ qui converge vers un point stationnaire de f, tel que $f_x = 0$.

Pour établir la méthode de la plus grande pente nous partons de l'algorithme du gradient .

$$x^{i+1} = x^{i} - \mu f_{x}(x^{i})$$

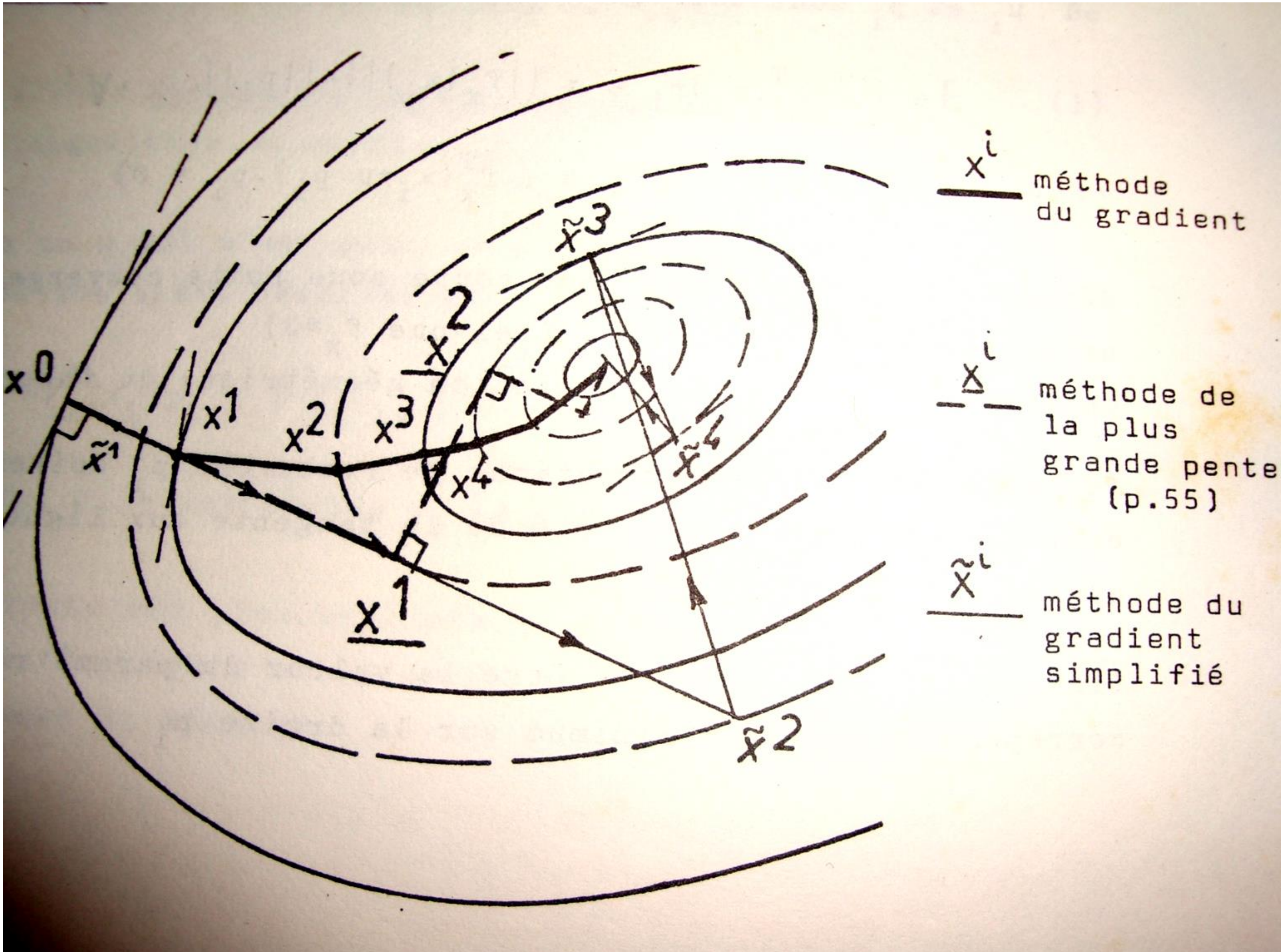
Prenons un μ qui n'est plus constant ;

La condition i) est vérifiée avec $\alpha = 1$ car :

$$-f_{x}^{T}(x^{i})p_{i} = \left[-f_{x}(x^{i})\right]^{2}$$

μ devient $\mu_i \inf \left\{ \mu \middle| \mu \geq 0,\ f_x^T\left[x^i - \mu f_x(x^i)\right].\left[-f_x(x^i)\right] = 0 \right\}$

Cette méthode est plus utilisée que celle du gradient. Elle assure une meilleure convergence qui se ralentit cependant au voisinage du minimum .



x0
x1
x2
x3
x4
X2
X1
x̃1
x̃2
x̃3
x̃5
Xi
méthode
du gradient
X̲i
méthode de
la plus
grande pente
(p.55)
X̃i
méthode du
gradient
simplifié

VI-2-d. Autres méthodes

Parmi les autres méthodes de recherche itérative d'optimum, on peut citer :

- La méthode du gradient conjugué ,
- la méthode de Newton,
- la méthode de Newton modifiée,
- la méthode de Powelle ,…