Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté des Sciences de Tétouan

Master Spécialisé

Génie Énergétique et Environnement

OPTIMISATION DES SYSTEMES ENERGETIQUES

CHAPITRE IV :
IDENTIFICATION DES SYSTEMES

Taib AJZOUL
Professeur au Département de Physique
Faculté des Sciences de Tétouan

OPTIMISATION ET IDENTIFICATION DES SYSTEMES

- IDENTIFICATION PARAMETRIQUE

- Méthode du modèle
- Critère d'optimisation

- IDENTIFICATION PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES:

- Exemple

IDENTIFICATION PARAMETRIQUE

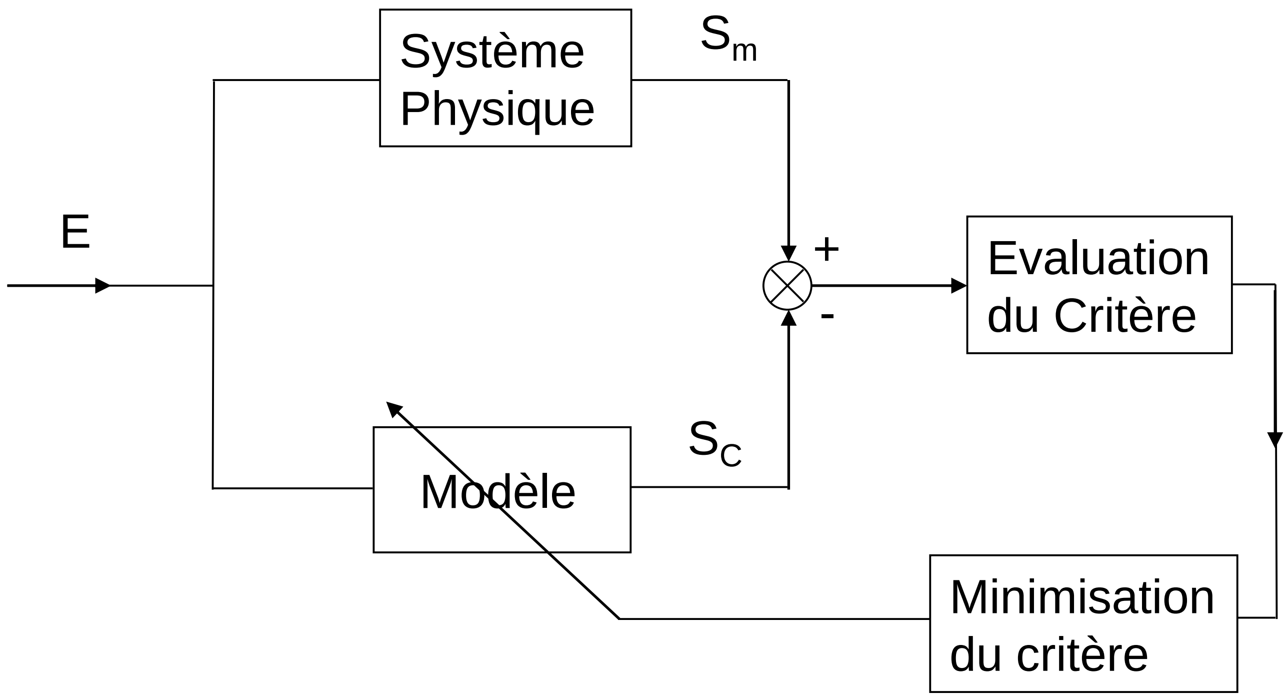
- Le problème d'identification se pose lorsque, dans les équations du modèle d'un système, il existe des paramètres mal connus.

- Les mesures sur le processus réel et l'utilisation de méthodes d'identification permettent alors à la détermination de ces paramètres.

- La méthode d'identification la plus utilisée est celle qui est décrit sous le non de méthode du modèle.

IV-1. Méthode du modèle

Le principe de la méthode est donné par la figure suivante :



- La procédure d'identifications paramétriques est la suivante :

- Rechercher la valeur optimale des paramètres du modèle qui minimise l'écart entre les réponses du système Sm et du modèle Sc , ces derniers étant soumis aux mêmes excitation d'entrée E.

- L'identification se réduit alors en un problème d'optimisation non linéaire dont la résolution directe ou itérative fournit la valeur des paramètres du modèle qui assurent le minimum du critère d'optimisation.

IV-2. Critère d'optimisation

- Suivant les données du problème, on peut choisir plusieurs critères :

IV-2-a. Critère d'optimisation dans le cas continu

$$J = \|\varepsilon(t)\|^2 = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon^T(t)\varepsilon(t)dt$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t)dt$$

Les matrices de pondération Q permettent d'accorder une importance différente aux composantes du vecteur d'écart $\varepsilon(t) = S_m - S_c$.

IV-2-b. Critère d'optimisation dans le cas discret

$$J = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \left[\varepsilon_j (t_i) \right]^2$$

$$J = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \left| \varepsilon_j (t_i) \right|$$

$$J = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^T (t_i) Q \varepsilon (t_i)$$

Le problème d'identification s'écrit alors :

Trouver $\underset{\overline{P}}{Min}\, J$

$\overline{P}$ est le vecteur des paramètres à identifier .

V-1. Méthode des moindres carrés pour un système linéaire

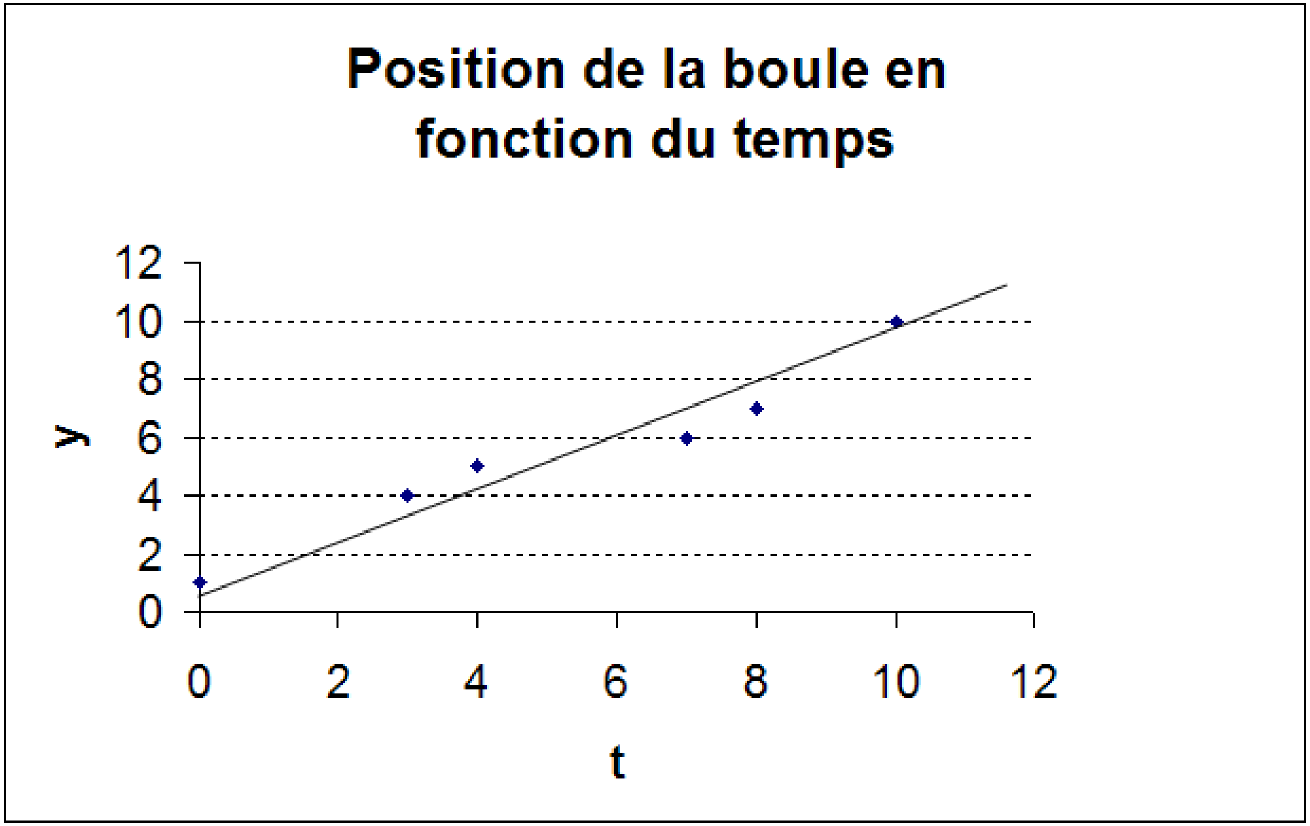
Considérons une boule qui roule à la vitesse constante υ . La position de cette boule sera donnée, à chaque instant, par :

$$y = a + \upsilon t$$

Supposant qu'en mesurant y en fonction de t, on obtient le tableau suivant :

t	***0***	***3***	***4***	***7***	***8***	***10***
y	***1***	***4***	***5***	***6***	***7***	***10***

La représentation graphique est la suivante :



On constante que les points ne se trouvent pas sur une droite. On veut donc calculer a et υ pour tracer la " meilleure" droite représentant les points mesurés

Soit $y = y_i$ la valeur de y mesurée à l'instant $t = t_i$.

La relation entre y_i et t_i est alors la suivante :

$$y_i = a + \upsilon t_i + r_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

où r_i est un résidu provenant d'erreurs de mesure.

La méthode des moindres carrés consiste à déterminer a et υ tels que la somme des carrés des résidus soit minimale.

Le problème d'optimisation est donc le suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver} \\ \\ \underset{P}{Min}\ J \end{cases}$$

avec

$$J = \sum_{i}^{m} r_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{m} (y_i - a - \upsilon t_i)^2$$

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} a \\ \upsilon \end{pmatrix}$$ est le vecteur des paramètres.

La condition nécessaire de la minimisation de J par rapport à a et υ est donc la suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{m}(y_i - a - \upsilon t_i) = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial \upsilon} = -2\sum_{i=1}^{m} t_i(y_i - a - \upsilon t_i) = 0 \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} ma + \sum_{i=1}^{m} t_i \,.\upsilon = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=t}^{m} t_i \,.a + \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \upsilon = \sum_{i=1}^{m} t_i \, y_i \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire de la manière suivante:

$$\begin{cases} \alpha_{11} a + \alpha_{12} \upsilon = b_1 \\ \alpha_{21} a + \alpha_{22} \upsilon = b_2 \end{cases}$$

Avec

$$\alpha_{11} = m \quad ; \; \alpha_{12} = \alpha_{21} = \sum_{i=1}^{m} t_i \quad ; \; \alpha_{22} = \sum_{i=t}^{m} t_i^2$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^{m} y_i \quad et \quad b_2 = \sum_{i=1}^{m} t_i y_i$$

En notation matricielle :

$$y_i = a + vt_i + r_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m \qquad y = Ax + r$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix} \quad ;$$

$$x = \begin{bmatrix} a \\ \upsilon \end{bmatrix} \quad ; \quad r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

Le critère J devient :

$$J = r^T r = (y - Ax)^T (y - Ax)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = A^T A \quad ; \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = A^T y$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} a + \alpha_{12} \upsilon = b_1 \\ \alpha_{21} a + \alpha_{22} \upsilon = b_2 \end{cases} \quad \text{devient :} \quad A^T A x = A^T y$$

La solution $\hat{x}$ de ce système est :

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

Si $\left(A^T A\right)^{-1}$ existe.

V-1-a. Cas de la boule roulante

Dans ce cas

t	*0*	*3*	*4*	*7*	*8*	*10*
y	*1*	*4*	*5*	*6*	*7*	*10*

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \; ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Posons $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\upsilon} \end{bmatrix}$

La relation $A^T A x = A^T y$ donne :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\upsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Effectuons les multiplications :

$$\begin{bmatrix} 6 & 32 \\ 32 & 238 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\upsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 230 \end{bmatrix}$$

Avec $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 32 \\ 32 & 238 \end{bmatrix}$ et

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{404} \begin{bmatrix} 238 & -32 \\ -32 & 6 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (M)^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Soit $$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{404}\begin{bmatrix} 238 & -32 \\ -32 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } A^T y = \begin{bmatrix} 33 \\ 230 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{\upsilon} \end{bmatrix} = \frac{1}{404}\begin{bmatrix} 238 & -32 \\ -32 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33 \\ 230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.223 \\ 0.802 \end{bmatrix}$$

D'où finalement $\hat{a} = 1.223 \quad et \quad \hat{\upsilon} = 0.802$