Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté des Sciences de Tétouan

Rappels sur les valeurs propres et les formes quadratique définies positives

I- Valeurs propres et vecteurs propres

Soit Q une matrice carrée à n lignes n colonnes dont les éléments sont des nombres réels.
Un scalaire ω est appelé valeur propre de Q, s'il existe un vecteur colonne non nul x tel que :

$$Qx = \omega x$$

Tout vecteur satisfaisant à cette condition est dit vecteur propre de Q associé à la valeur propre ω.

$$\det(Q-\omega I) = 0$$

est l'équation aux valeurs propres de la matrice Q

II – Formes quadratiques définies positives

Soit $x \in IR^n$ et Q matrice symétrique

$$F(x) = x^T Qx$$

est une forme quadratique.

On note $$F(x) = \langle x, Qx \rangle$$

Résultat 1

Une condition nécessaire et suffisante pour que *F(x)* soit définie positive et que toutes les valeurs, propres de *Q* soient positives.

Pour le calcul des valeurs propres de *Q*, on utilise l'équation aux valeurs propres de la matrice *Q*:

$$\det(Q-\omega I)=\begin{vmatrix} q_{11}-\omega & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22}-\omega & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nm}-\omega \end{vmatrix}=0$$

Exemple

Soit la matrice $\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

L'équation aux valeurs propres est :

$$\begin{vmatrix} 11-\omega & -6 & 2 \\ -6 & 10-\omega & -4 \\ 2 & -4 & 6-\omega \end{vmatrix} = -\omega^3 + 27\omega^2 - 180\omega + 324 = 0$$

Les racines sont $\omega_1 = 3\,;\, \omega_2 = 6\,;\, \omega_3 = 18$

$\omega_i > 0 \ \forall\ i = 1, 2, 3$

donc la matrice $\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ est définie positive

Résultat 2

On démontre que pour que les valeurs propres soient toutes positives il faut et il suffit que les déterminants :

$$q_{11} \quad ; \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nm} \end{vmatrix}$$

Soient positifs

Exemple

Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

$q_{11} = 11 > 0$; $\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 64 > 0$

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 324 > 0$$

Donc la matrice A est définie positive

Résultat 3

Soit $D = \{ x : Ax = 0 \}, \quad A \in M_{mxn}, \quad rang\ A = m$

Soit $F(x) = x^T Qx$

Q est définie positive dans D si et seulement si la matrice $A^T QA$ est définie positive ou encore si les racines de l'équation :

$$\det \begin{bmatrix} \omega I - Q & \vdots & A^T \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A & \vdots & \end{bmatrix} = 0$$

sont positives