UNIVERSITE ABDEMALEK ESSAADI
Faculté des Sciences
Département de Physique
Laboratoire d'Énergétique
Équipe de Thermique, Énergie solaire et Environnement ETEE

TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION EN REGIME PERMANENT

**(Licence Professionnelle d'Énergétique
Parcours d'Energétique LF)**

Abdelmajid El Bouardi

AVANT PROPOS

Les problèmes de déperditions thermiques à travers les parois de bâtiment (isolation), à travers les conduits (échangeurs et chaudières) et celui du rendement des machines thermiques sont mal maîtrisés. Ce document présente les principes de base qui interviennent dans le transfert par conduction pure de chaleur en régime permanent des températures. Il sera étendu par la suite à d'autres formes de transferts de chaleur : convection et rayonnement.

Ce polycopie est vivement recommandé aux étudiants du deuxième cycle, aux licences appliquées, aux licences professionnelles de Thermique et d'Energétique, aux étudiants de licence fondamentale (parcours énergétique) au étudiants de Masters d'Energétique, aux étudiants des facultés des sciences et techniques et écoles d'ingénieurs où l'enseignement de la thermique et énergétique commence à prendre place. Il s'adresse aussi aux techniciens et à tous ceux qui veulent s'initier aux problèmes des échanges thermiques.

Structuré suivant le programme préconisé pour les licences appliquées, Professionnelle et Master spécialisé de Génie Énergétique. Ce polycopie contient deux chapitres qui regroupent toutes les définitions élémentaires de base et outils de calcul analytique et numériques.

Certains exercices et problèmes sont proposés afin que le lecteur puisse, soi même, juger ses connaissances dans ce domaine.

Enfin, des pages 'notes' sont réservées aux remarques des lecteurs que nous prendrons avec plus de soin et considération pour la mise au point ce document.

Prof. Abdelmajid El Bouardi

CHAPITRE I

GENERALITES ET DEFINITIONS

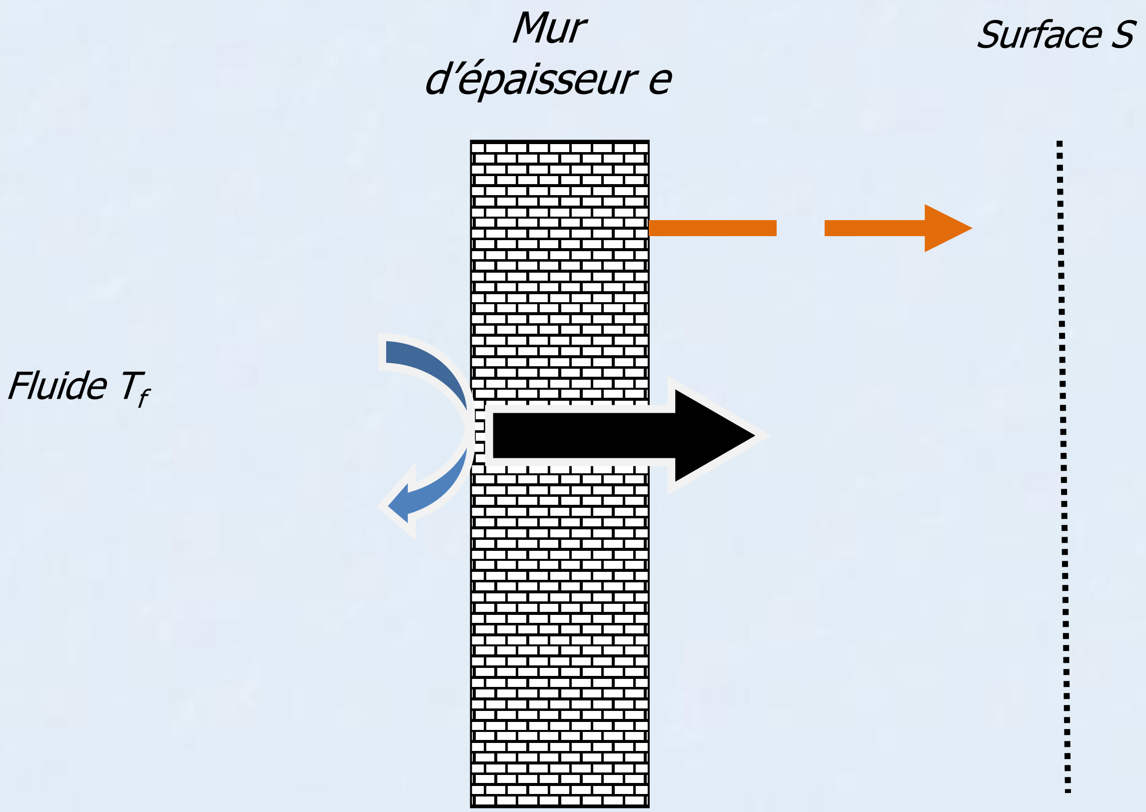
I - POSITION DU PROBLEME

La principale caractéristique de la conduction est que l'énergie se propage par contact sans déplacement appréciable des molécules. Dans le cadre de ce cours nous ne nous intéressons pas au mécanisme interne de transfert (par exemple diffusion des électrons d'une région à haute température vers une région à basse température dans les métaux, au contact élastique entre les molécules pour les fluides). En dehors de ce mécanisme à l'échelle microscopique, qui est d'ailleurs mal connu, l'effet observable est l'égalisation des températures. Cependant si les températures sont maintenues en différents points par l'apport ou l'évacuation de chaleur il s'établit un écoulement continu de chaleur de la région chaude vers la région froide.

Introduction

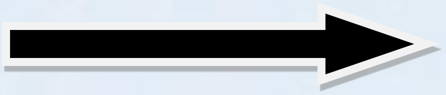
Le transfert de chaleur entre deux systèmes peut s'effectuer en général selon trois modes (conduction, convection et rayonnement) comme le montrent la figure ci-contre pour le cas d'un mur échangeant de la chaleur par convection avec une ambiance et une surface vitrée.. Pour mieux estimer le rendement ou rentabilité de certains systèmes physiques il est nécessaire de tenir compte des trois modes de transferts (cas d'un capteur solaire par exemple).

Système peut être le siège de ces trois modes d'échanges



Représentation des différents modes de transferts de chaleur

Transferts par conduction h
(Solide)



Transferts par convection h_v
(solide +fluide)

Transferts par rayonnement h_r
(Surfaces en regards)

Dans un problème de conduction, on dispose donc d'un système matériel dont on connaît la géométrie et les caractéristiques physiques. Ce système est en contact avec des sources de chaleur. La façon dont ces sources agissent constituent les liaisons thermiques. La connaissance de ces sources et des liaisons thermiques constituent les conditions aux limites du système. Si l'on admet que la température a toujours une valeur bien définie en chaque point et à chaque instant, le problème à résoudre est donc la connaissance de la température en tout point et son évolution au cours du temps. C'est la recherche du champ de température. De plus dans la plupart des cas la connaissance des quantités de chaleur transmises est primordiale.

En toute généralité ce problème est très difficile à résoudre, parfois impossible avec des moyens simples de calcul. Il est donc nécessaire de choisir des hypothèses simplificatrices et d'utiliser des méthodes analogiques, graphiques et numériques.

II - LOI FONDAMENTALE DE LA TRANSMISSION DE LA CHALEUR PAR CONDUCTION

La relation fondamentale de la transmission de la chaleur par conduction a été proposée par FOURIER en 1822.

Pour bien comprendre cette loi, il faut au préalable définir un certain nombre de grandeurs physiques.

1- Définitions

a) Flux de chaleur à travers une surface

C'est la quantité de chaleur qui traverse la surface considérée pendant l'unité de temps, le symbole utilisé est la lettre ϕ. L'unité dans le système international est le Watt. Dans le système pratique ou système des ingénieurs encore couramment utilisé on emploie comme unité de flux de chaleur la Kcal/h.

b) Densité de flux de chaleur

C’est la quantité de chaleur qui traverse l’unité de surface pendant l’unité de temps. C’est donc le flux de chaleur par unité de surface. On le note q. Les unités sont dans le système international le Watt/ m^2, dans le système des ingénieurs la Kcal/h.m^2

c) Surfaces isothermes

Considérons dans un corps homogène un champ de température T défini en chaque point et à chaque instant par la fonction T(x,y,z,t). x,y,z variables spatiales, t est le temps. Dans tout le corps on peut définir à l’instant t des surfaces lieu des points ayant la même température appelée surfaces isothermes.

Dans le cas particulier du régime permanent, qui sera développé ultérieurement, la température est indépendante du temps et les surfaces isothermes sont fixes.

Remarques importantes :

Deux surfaces isothermes ne peuvent se couper car on aurait alors deux températures différentes en même point ce qui est physiquement impossible.

d) Gradient de température

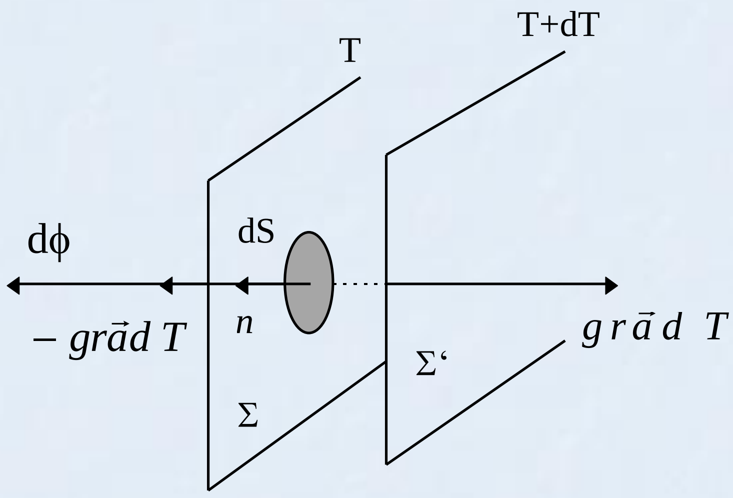


Figure 1

Considérons deux surfaces isothermes Σ(T) et Σ(T + dT), oo' la normale commune à ces deux surfaces, dn la distance oo'(figure 1). On définit au point o vecteur gradient de température $gr\vec{a}d$ T dont le module est égal à $\frac{\partial T}{\partial n}$. Du point de vue physique, le gradient de température représente donc le taux de variation de la température suivant la direction normale à l'isotherme. Le vecteur gradient est en chaque point normale à la surface isotherme passant par ce point.

2 - Généralités - Loi de FOURIER

2.1 Généralités

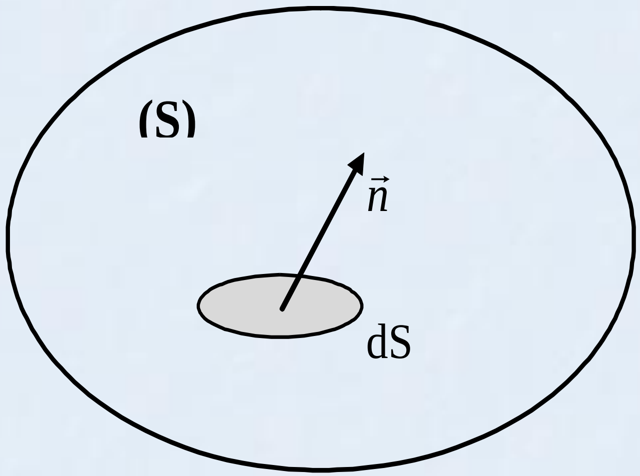


figure 2

Soit un corps (S) dont la répartition de température initiale est non uniforme (figure 2 ci-contre).

Laissons évoluer le corps, la température T varie en chaque point au cours du temps, le régime est dit transitoire et $T = T(x,y,z,t)$, t est le temps.

Au bout d'un certain temps, plus ou moins long, la température en un point devient indépendante de t; on a alors : $T = T(x,y,z)$.

Découpons autour d'un point M quelconque un élément de surface $d\vec{s}$ d'aire dS élémentaire.

On peut écrire : $d\vec{s} = \text{dS}.\vec{n}$ ($\vec{n}$ vecteur unitaire normale à la surface).

La quantité de chaleur dQ qui traverse la surface dS pendant l'intervalle de temps dt dans le sens de la normale $\vec{n}$ est donnée par la loi de FOURIER :

$$dQ = -\lambda \; gr\vec{a}d\,\text{T}.\vec{\text{n}}.ds.dt$$

où $gr\vec{a}d\,\text{T}.$ est le gradient de température défini suivant les axes *ox*, *oy* et *oz* par :

$$\overrightarrow{grad}\,\text{T} \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

λ est le coefficient appelé conductivité thermique du matériau appelé aussi coefficient de FOURIER.

Pour un milieu isotrope, la conductivité thermique λ est une grandeur scalaire positive, caractéristique du milieu, fonction du point M(x,y,z) et de T. Pour un milieu isotrope et homogène , λ ne dépend que de T. Dans de nombreux cas pratiques, lorsque les écarts de température ne sont par trop élevés, on peut considérer, avec précision, λ comme une constante pour un milieu donné.

Pour le cas contraire (corps non isotropes), λ est tenseur.

- *Différentes unités utilisées :*

Dans le système internationale λ s'exprime donc en Joule/s.m.°C ou en Watt/m.°C.

On a pris cependant l'habitude d'exprimer les quantités de chaleur en calories ou en kilocalories et dans la plupart des applications industrielles on exprime λ en kilocalories par heure par mètre et par degré centigrade (Kcal/h.m.°C).

Une unité dérivée du système CGS est également utilisée, c'est la cal/s.cm.°C

Les transformations d’unités les unes dans autres sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Transformation de λ en	S.I Watt/m°C	Système pratique Kcal/h.m.°C	Système CGS Cal /s.cm.°C
S.I Watt/m°C	1	0,8598	23,88
Système pratique Kcal/h.m.°C	1,163	1	$2,778.10^{-3}$
Système CGS Cal /s.cm.°C	$4,18.10^{-2}$	360	1

Tableau 1 : Systèmes d’unités utilisés

- Quelques valeurs de la conductivité thermique λ

On donne (tableau ci-contre) quelques valeurs de la conductivité thermique λ pour les solides bons conducteurs (métaux), mauvais conducteurs (liquides et gaz). pour les autres matériaux par exemple ceux utilisés dans la construction et l'isolation des bâtiments, on cherchera avec les moyens de bord à les déterminer expérimentalement et aussi par modélisation. Ceci fera l'objet du cours de métrologie de propriétés thermophysiques

Matériaux	**λ en W/m.°C**
Gaz à la pression atmosphérique	0.006 - 0.15
Matériaux solide isolants (laine de verre, liège....)	0.025 - 0.18
Liquides non métalliques	0.075 - 0.60
Matériaux de construction (brique, pierre, béton, bois,...)	0.10 - 2.2
Métaux liquides	7.5 - 67
Alliages métalliques	12 - 100
Métaux purs	45 - 350

Tableau 2 : Quelques valeurs de la conductivité thermique

En général, le coefficient λ dépend d'un très grand nombre de facteurs, les plus importants étant la direction (dans le cas des corps anisotropes où existent des directions privilégiées de propagation de la chaleur), la température, la pression (mécanique pour les solides mais surtout pression interstitielle de gaz ou vapeurs occlus des milieux poreux).

Remarques :

- La présence du signe - dans le second membre de la loi de FOURIER signifie que le flux de chaleur progresse dans le sens opposé au gradient de température c'est à dire des températures les plus élevées aux températures les plus basses.

- Si la surface dS est située sur une surface isotherme les vecteurs $gr\vec{a}d\,T$ et $\vec{n}$ sont alors colinéaires d'où :

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} .dS.dt \,,\ \phi = \frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}} = -\lambda \frac{dT}{dx}\,\mathrm{dS} \text{ et } q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

2.3 Définition de quantité de chaleur, flux de chaleur et densité de flux thermique

Considérons un plancher chauffé de manière uniforme sur toute sa surface S.

Soit dQ la quantité de chaleur échangée entre ce plancher chauffant et l'air ambiant pendant le temps *dt*. On appelle :

- flux thermique : la puissance échangée par la surface S du plancher

$$\phi = \frac{dQ}{dt}$$

- densité de flux thermique : la puissance échangée par une surface unité de ce plancher

$$q = \frac{dQ}{S\,\mathrm{dt}} = \frac{\phi}{S}$$

2.4 Unités:

Dans les relations précédentes il faut retenir que :

Q représente une énergie et s'exprime, dans le système d'unités SI, en Joule,

ϕ représente une énergie par unité de temps, c'est à dire une puissance, et s'exprime en Watt,

$|\vec{q}|$ densité de flux thermique, représente une puissance par unité de surface et s'exprime en W/m^2.

2.5 Source interne

Une source interne est définie par la puissance thermique H qu'elle produit par unité de volume du milieu. Dans le cas général, H est fonction de la position du point, de la température et du temps : H(x,y,z,T.t).

Les cas particuliers les plus fréquents sont :

$H(x,y,z;T,t) = H_0 \, e^{(-\alpha T)}$, où α et H_0 désignent des constantes.

C'est le cas des réactions chimiques.

$$H(x,y,z;T,t) = A(x,y,z,T,t) + B(x,y,z,T,t)\,T$$

où H est une fonction linéaire de la température T.

Ce dernier cas correspond à une production de la chaleur par effet Joule.

III - EQUATION GENERALE DE LA CONDUCTION

Nous proposons dans ce paragraphe la première méthode souvent utilisée pour établir la fameuse équation de transfert de chaleur par conduction. La seconde est aussi bien détaillée au &VI.3.

- première méthode

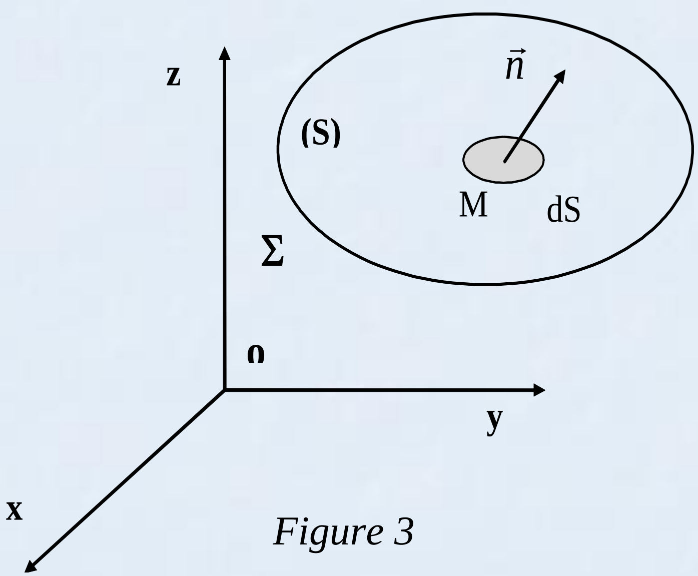


Figure 3

Considérons un champ de température T(x,y,z,t) dans un volume Δ limité par une surface Σ d'un corps quelconque de masse volumique ρ, de chaleur massique à volume constante C_v et de conductivité thermique λ (***figure 3***).

En un point M de la surface Σ, considérons un élément de surface dS et soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale M orientée vers l'extérieur.

Nous allons par application de la formule de FOURIER calculer la quantité de chaleur dQ_1 qui pénètre dans le volume Δ à travers dS pendant l'intervalle de temps *dt*. Avec les conventions habituelles, on compte positivement les énergies reçues par le système.

$$dQ_1 = -\lambda \; gr\vec{a}d\, \mathrm{T}.\vec{\mathrm{n}}.dS.dt$$

La quantité de chaleur totale qui pénètre dans le volume Δ à travers la surface Σ pendant dt est alors donnée par :

$$Q_1 = \iint_\Sigma \lambda \; \vec{\mathrm{n}}.\; gr\vec{a}d\, \mathrm{T}.dS.dt$$

Selon OSTROGRADSKY, on peut donc écrire :

$$Q_1 = \iint_\Sigma \lambda \; \vec{\mathrm{n}}.\; gr\vec{a}d\, \mathrm{T}.ds.dt \; = \; \iiint_\Delta \mathrm{div}(\lambda.\, gr\vec{a}d\, \mathrm{T})\, \mathrm{dv.dt}$$

Où dv désigne l'élément de volume pris à l'intérieur de Δ.

Désignons par Q_2 la quantité de chaleur créée dans le volume Δ. En effet dans le cas général d'un corps quelconque il peut y avoir création de chaleur dans la masse.

Comme nous l'avons défini précédemment, H(*x*,*y*,*z*,*t*) est le flux de chaleur créé par unité de volume.

La chaleur générée par les sources internes est donnée par l'intégrale :

$$Q_2 = \iiint_{\Delta} H(x,y,z,t)\, dv.dt$$

Le bilan énergétique établi pour le volume Δ nous permet d'écrire :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

où Q_3 représente la quantité de chaleur nécessaire à la variation de température du volume Δ.

Si $\dfrac{\partial T}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dt}$ représente la variation de température du volume dv pendant *dt*, l'équation calorimétrique nous permet d'écrire alors :

$$\mathrm{dQ_3} = \rho\, \mathrm{C_v} \frac{\partial T}{\partial \mathrm{t}}\, \mathrm{dt.dv}$$

et par suite :

$$Q_3 = \iiint_\Delta \rho .\ C_v \frac{\partial T}{\partial t}\ dt.dv$$

D'après l'équation du bilan énergétique pour le volume Δ il vient :

$$\iiint_\Delta div(\lambda.\,gr\vec{a}d\ T)\ dv.dt + \iiint_\Delta H(x,y,z,t)\ .dv.dt = \iiint_\Delta \rho\, C_v \frac{\partial T}{\partial t}\ .\ dv.$$

d'où

$$div(\lambda\ .\mathrm{gr\vec{a}d}\ T) + H(x,y,z,t) = \rho\, C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

en développant $div(\lambda\ .\mathrm{gr\vec{a}d}\ T)$ il vient :

$$\lambda\ \Delta T + \mathrm{gr\vec{a}d}\ \lambda\ .\ \mathrm{gr\vec{a}d}\ T + H(x,y,z,t) = \rho\, C_v \frac{\partial T}{\partial t}$$

Avec :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \text{ en coordonnées cartésiennes.}$$

C'est donc l'équation de la chaleur sous sa forme classique sans aucune condition sur la conductivité thermique λ du corps.

VI - QUELQUES CAS PARTICULIERS

1) La conductivité thermique λ dépend que de la température λ = f(T) :

En calculant le produit scalaire $\vec{\text{grad}}\,\lambda \,.\, \vec{\text{grad}}\,T$ de l'équation de chaleur établie ci-dessus peut donc se mettre sous la forme :

$$\lambda\ \Delta T + \frac{\partial\lambda}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial\, T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\, T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\, T}{\partial z}\right)^2 \right] + H(x,y,z,t) = \rho,t\ _v\ \frac{\partial T}{\partial t}$$

2) La conductivité thermique ne dépend pas de la température :

Dans le cas où la conductivité thermique ne dépend pas de la température ou sa variation est négligeable ce qui entraîne aussi que H(x, y, z, t) est indépendant de la température, on obtient dans ce cas l'équation linéaire classique de la chaleur :

$$\lambda\ \Delta T + H(x,y,z,t) = \rho\, C_v\, \frac{\partial T}{\partial t}$$

Nous nous limitons, dans ce qui suit, à ce type d'équations seulement. On en déduit aisément les cas fréquemment rencontrés lors de l'étude des systèmes physiques.

- *régime permanent avec source interne :*

$$\lambda \, \Delta T + H(x,y,z,t) = 0 \text{, équation de POISSON}$$

- *régime permanent sans source interne :*

$$\lambda \, \Delta T = 0 \text{, équation de LAPLACE}$$

- *régime variable (transitoire) sans source interne :*

$\lambda\ \Delta T = \rho C_v \dfrac{\partial T}{\partial t}$, équation de FOURIER qu'on a l'habitude d'écrire sous la forme :

$\Delta T = \dfrac{1}{a} \dfrac{\partial T}{\partial t}$ avec $a = \dfrac{\lambda}{\rho C_v}$, a est la diffusivité thermique du matériau.

a) Cordonnées cylindriques :

En coordonnées cylindriques on a (figure 5) : T = T(φ,r,z,t). L'équation de la chaleur (à titre d'exercice le lecteur peut essayer de le prouver par simple démonstration) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

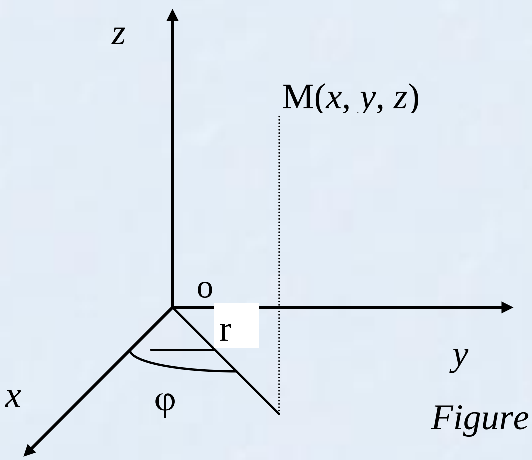


Figure 5

$$\begin{cases} x = r\ \cos(\varphi) \\ y = r\ \sin(\varphi) \\ z \end{cases}$$

De plus dans le cas d'une symétrie cylindrique T = T(r,t), l'équation précédente se réduit à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

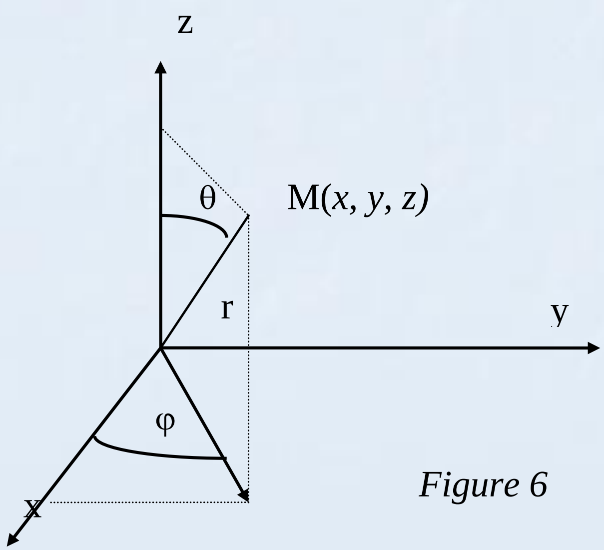
b) Coordonnées sphériques

En coordonnées sphérique (figure 6), la température dépend de r, θ, φ et t soit :

$$T = T(r, \theta, \varphi, t)$$

En exprimant le Laplacien dans ce système de coordonnées, l'équation de la chaleur devient dans ce cas :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} - \frac{tg\varphi}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$



$$\begin{cases} x = r\sin\theta . \cos\varphi \\ y = r\sin\theta . \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Figure 6

Dans le cas d'un problème à symétrie sphérique (problème de la sphère), la température est alors une fonction qui ne dépend pas des variables θ et φ.

$$T = T(r,t)$$

L'équation précédente se réduit alors à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

V - GENERALITE : CORPS EN MOUVEMENT

Nous avons fait dans les cas précédents des hypothèses restrictives ; si l'on suppose d'une façon plus générale que : $\lambda = \lambda(T)$ et le corps (S) animé d'une vitesse absolue $\vec{V}$, on a en reprenant la démoustication précédente :

$$\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} = \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x} + \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)dx + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 \frac{d\lambda}{dT}\,dx$$

et

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t}dt + \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz = \frac{\partial T}{\partial t}dt + (\vec{V}.\vec{\mathrm{grad}}\,T)\,dt$$

Si de plus on suppose que dans le corps il y a un dégagement de chaleur (lors d'une réaction chimique par exemple H), on a l'équation de transmission de chaleur par conductibilité sous sa forme générale :

$$div(\lambda\,.\vec{\mathrm{grad}}\,T) + H(x,y,z,t) = \rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\mathrm{grad}}\,T\right)$$

Dans la plupart des cas l'équation de la chaleur écrite sous sa forme la plus simple est suffisante pour traiter les problèmes usuels.

VI - CONDITIONS AUX LIMITES SPACIO-TEMPORELLES POUR LA RESOLUTION DE L'EQUATION DE LA CHALEUR

L'équation générale de la chaleur crée une relation entre la fonction température T et les variables x,y,z et t. La solution mathématique de cette équation aux dérivées partielles , linéaire, du deuxième ordre admet en principe une infinité de solutions. Aussi, la résolution de l'équation nécessite d'une part la connaissance de la condition initiale c'est à dire la répartition initiale des températures en tout point du milieu (T(x,y,z,0)) et d'autre part la loi de variation de la fonction température ou de sa dérivée normale sur la surface S.

- condition initiale :

C'est la répartition de température à l'instant t = 0 soit
$T = f(x,y,z,0)$ .Généralement cette condition est connue .

- condition aux limites :

Sur les frontières d'un matériau différents types de conditions aux limites peuvent apparaître dans les problèmes couramment rencontrés en transfert de chaleur.

1) - la température est imposée sur la surface S (condition de Dirichlet)

$$T_s = f(M_S, t)$$

2) - la densité est imposée sur le pourtour S (condition de Neumann)

$$q = -\lambda \left(\frac{dT}{dn}\right) = f(M_S, t)$$

Où $\left(\frac{dT}{dn}\right)_s$ est la dérivée normale à la surface.

3) - Transfert linéaire à la surface S (condition mixte ou de FOURIER) :

On précisera ultérieurement (voir transferts de chaleur par convection) que le flux de chaleur échangé par convection entre une paroi solide à la température T_s et le fluide qui la baigne à la température T_f est donné par :

$$q = h_c \, (T_s - T_f)$$

Avec h_c coefficient d’échange superficiel par convection.

De plus, l'étude du rayonnement thermique (voir transfert de chaleur par rayonnement) montre que la densité de flux échangée entre une surface unitaire à température T_s et des surfaces avoisinantes (à température moyenne T_p) est donné par la formule :

$$q_r = A(T_s^4 - T_p^4)$$

A est facteur dépendant des propriétés de rayonnement des surfaces en regard (émissivité et absorptivité) et de la géométrie du problème (facteurs de forme).

Lorsque les températures T_s et T_p sont voisines nous pouvons linéariser l'expression précédente de q_r en faisant valablement l'approximation suivante :

$$(T_s^4 - T_p^4) \cong 4T_p^3 (T_S - T_p)$$

d'où :

$$q_r = 4 \text{ A } T_p^3 (T_S - T_p) = h_r (T_S - T_p) \quad \text{avec} \quad h_r = 4 \text{ A } T_p^3$$

En utilisant la loi de Fourier, le bilan énergétique à la surface s'écrira alors :

$$q = -\lambda \left(\frac{dT}{dn}\right)_s = h_c \left(\mathrm{T_s} - T_f \right) + h_r \left(\mathrm{T_s} - T_p \right)$$

En introduisant :

- *h* coefficient d'échange superficiel global (convection + rayonnement)
- T température prenant en compte à la fois la température du fluide T_f et la température moyenne T_p des parois ou surfaces environnantes :

$$T_m = \frac{h_c T_f + h_r \ T_p}{h_c + h_r}$$

Remarque : Dans la plupart des applications techniques on fait l'hypothèse :

$$T_m = T_f = T_p$$

Le coefficient h_r prend en compte ce qui est habituel d'appeler les échanges par rayonnement grandes longueurs d'onde. En effet les températures de parois prises en compte (T_s et T_p) sont voisines de la température ambiante. Les énergies émises par rayonnement sont donc constituées de radiations situées dans l'infrarouge lointain (longueurs d'onde de l'ordre de 10 microns).

Le rayonnement courte longueur d'onde (rayonnement solaire par exemple) ne peut pas être inclus dans le coefficient $h_{r.}$ Son action dans le bilan énergétique de la paroi devra être traitée indépendamment (voir introduction de la température équivalente au rayonnement solaire).

4) - le solide étudié est en contact avec un autre matériau

A l'interface S des 2 milieux possédant des conductivités différentes λ_1 et λ_2 la conservation du flux s'écrit :

$$\lambda_1 \; grad\, T_1 = \lambda_2 \, grad\, T_2 \text{ sur S}$$

Une deuxième condition est obtenue, dans le cas d'un contact parfait. Il s'agit de l'égalité des températures sur S :

$$T_1 = T_2$$

Dans la réalité cette condition n’est pas réalisée, il y a discontinuité de la température au contact des deux matériaux (figure 7). La condition obtenue sur l’interface s’écrit alors :

$$T_1(S) - T_2(S) = R.q$$

q étant la densité du flux traversant l’interface.

R est un paramètre représentant la résistance thermique de contact qui sera précisée dans le paragraphe qui suit.

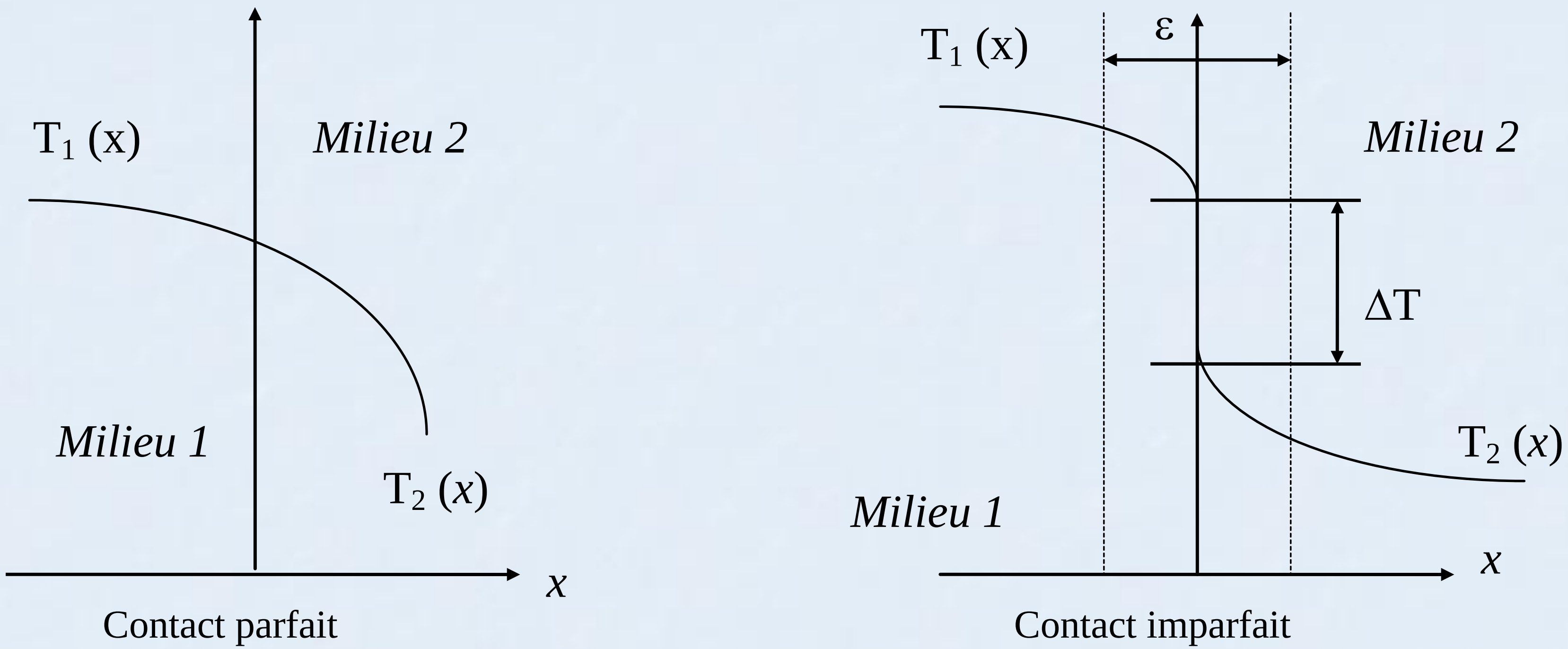


Figure 7

Dans les problèmes rencontrés généralement en isolation du bâtiment, on néglige cette résistance thermique de contact.

5) - Conclusions :

Les conditions aux limites rencontrées dans les problèmes du thermique sont donc :

- conditions de Dirichlet : température imposée sur la surface

$$T_s = f(M_S , t)$$

- conditions de Neumann : densité de flux imposée à la surface :

$$q = -\lambda \left(\frac{dT}{dn}\right) = f(M_S, t)$$

- conditions de Fourier : densité de flux fonction linéaire de l'écart de température surface-milieu baignant la surface (milieu fluide)

$$q = -\lambda \left(\frac{dT}{dn}\right)_S = h\,(T_S - T_f)$$

- contact entre deux matériaux

$$T_1 = T_2 \quad \text{ou} \quad |T_1 - T_2| = R\lambda_1 \left(\frac{dT_1}{dn}\right) = R\lambda_2 \left(\frac{dT_2}{dn}\right)$$

Joseph Fourier

Naissance	21 mars 1768 Auxerre (France)
Décès	16 mai 1830 (à 62 ans) Paris (France)
Nationalité	Française
Domaines	Mathématiques, physique
Institutions	École Polytechnique
Diplôme	École normale supérieure
Renommé pour	Série de Fourier, Transformée de Fourier

Fin du chapitre

CHAPITRE II

TRANSFERT DE CHALEUR EN REGIME PERMANENT

I - SIMPLIFICATION DE L'EQUATION FONDAMENTALE DE LA CHALEUR :

Dans un certain nombre de problèmes, la géométrie du solide est très simple. S'il en est de même des conditions aux limites, l'équation fondamentale se simplifie beaucoup.

Supposons que la géométrie du solide soit finie par les plans parallèles. Nous prendrons pour axe des x une direction perpendiculaire à ces plans. Supposons de plus, que les propriétés thermophysiques ne dépendent que de l'abscisse x en non de y et z.

Par exemple :

$$H = H(x, T.....)$$

Si de plus, les conditions aux limites sont identiques dans tout plan perpendiculaire à l'axe des x, par exemple température uniforme ou densité du flux de chaleur uniforme, l'équation fondamentale devient :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{H(x, T, \ldots)}{\lambda}$$

II - PROBLEME DU MUR

1 - Mur simple sans production de chaleur.

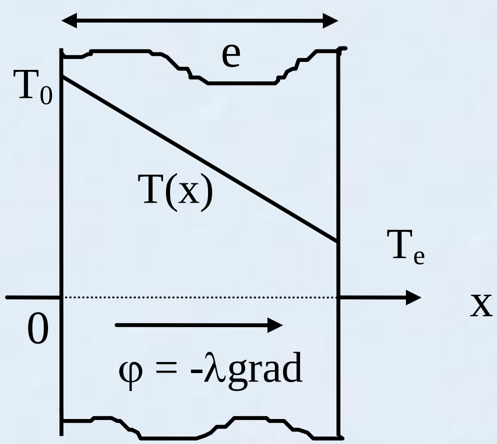


Figure 1

Supposons que le corps conducteur de la chaleur forme un mur ou une paroi dont les faces planes et suffisamment étendues dans les directions y et z pour admettre qu'elles sont infinies. Soit e l'épaisseur de ce mur (Figure 1).

Si de plus :

- les propriétés du corps sont unidimensionnelles,
- les conditions aux limites également,

nous avons pour équation de propagation dans le cas ou H(x, y, z, t) = 0 :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

dont la solution est :

$$T = A.x + B$$

où A et B sont deux constantes d'intégration dont les valeurs sont déterminées par les conditions aux limites

a) Conditions aux limites de Dirichlet :

Les températures sont imposées sur les deux faces (figure 1).
Nous prendrons *0* pour abscisse de l'une des faces, l'autre étant alors *e*.
Ainsi nous supposerons :

$$\begin{cases} T = T_0 \text{ si } x = 0 \\ T = T_e \text{ si } x = e \end{cases}$$

On obtient :

$$T = \frac{T_e - T_0}{e} x + T_0$$

La loi de répartition de la température est linéaire.

La densité du flux de chaleur est alors :

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_e - T_0}{e}$$

Cette quantité est donc constante dans le solide. En particulier, le flux pénétrant par la face
$x = 0$ est :

$$q_0 = -\lambda \frac{T_e - T_0}{e}$$

et celui sortant par la face $x = e$ est

$$q_e = -\lambda \frac{T_e - T_0}{e}$$

Si T_0 est supérieure à T_e, ces quantités sont positives donc la chaleur pénètre bien, par la face $x = 0$ et ressort par la face $x = e$. Si au contraire, T_e est supérieure à T_0 alors c'est le contraire et les densités du flux sont négatives.

b) Conditions aux limites de Neumann

La température est imposée sur l'une des faces et le flux sur l'autre. Supposons donc que les conditions aux limites soient, par exemple :

$$T = T_0 \qquad \text{si } x = 0$$

$$q_e = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \text{si } \quad x = e$$

On obtient :

$$T = -\frac{q_e}{\lambda} x + T_0$$

La loi de répartition est naturellement encore linéaire. La densité du flux de chaleur en tout point est :

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = q_e$$

Elle est donc constante dans le solide. La température sur la face $x = e$ est :

$$T_e = - \frac{q_e}{\lambda} e + T_0$$

2) Résistance thermique d'un mur simple.

Nous avons vu que la densité du flux de chaleur est alors :

$$q = -\lambda \frac{T_e - T_0}{e}$$

formule que généralise celle de la paroi mince. Si nous considérons une surface S de cette paroi le flux de chaleur qui la traverse est :

$$\phi = qS = -\lambda \mathrm{S} \frac{T_e - T_0}{e}$$

D'où :

$$\delta T = (T_0 - T_e) = \frac{\mathrm{e}}{\lambda \mathrm{S}} \phi$$

Dans l'analogie électrique T_0 - T_e est analogue à une tension V et ϕ à un courant électrique I. Or :

D'après la loi d'Ohm : $V = R\ I$, $\frac{e}{\lambda\,\mathrm{S}}$ est analogue à une résistance électrique.

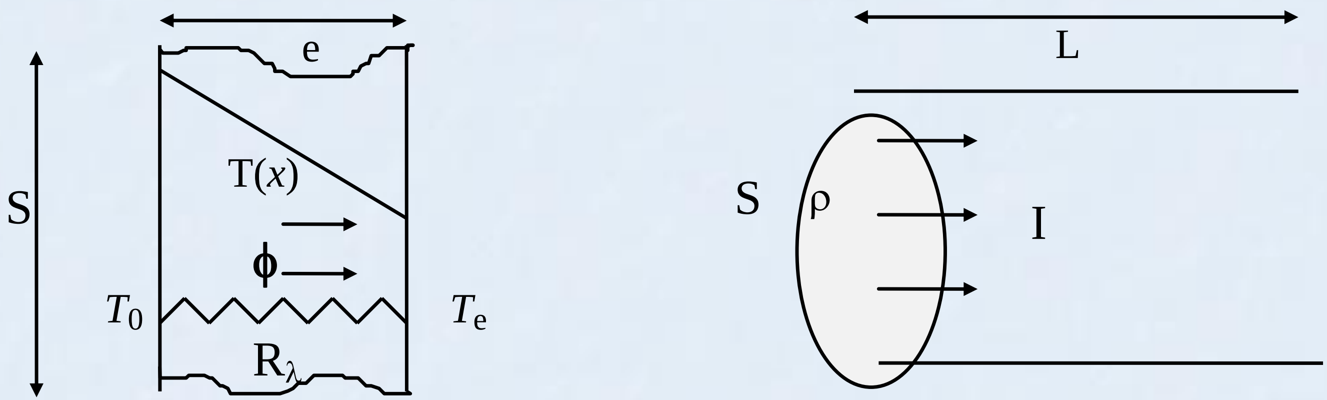
C'est pourquoi, on l'appelle la résistance thermique R_λ de la paroi :

$$R_\lambda = \frac{e}{\lambda\,\mathrm{S}}$$

Il convient de se rappeler que la résistance électrique d'un conducteur est donnée par la formule :

$$R = \rho\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{S}}$$

Où ρ est la résistivité électrique du conducteur. Cette formule est tout à fait analogue à la précédente puisqu'il a déjà été remarqué l'analogie entre ρ et $1/\lambda$ et que S est la section de passage du courant électrique comme S celle de la chaleur, *L* est la longueur du conducteur parcouru par le courant comme *e* est l'épaisseur traversée par la chaleur (figure 2).



$R_\lambda = e/\lambda S$ et $\rho_\lambda = 1/\lambda$

$R = \rho L/S$

Figure 2 : Analogie électrique

3 - Coefficient de transfert d'un mur simple.

Le coefficient de transfert h de chaleur d'un corps C_1 de surface S_1 et de température T_1 à un corps C_2 de surface S_2 et température T_2 est défini par la relation :

$$\phi = h\, S_1\, (T_1 - T_2)$$

où ϕ est le flux de chaleur échangé.

Dans le cas d'un mur simple, le coefficient de transfert entre les deux faces est alors :

$$h = \frac{\varphi}{S(T_1 - T_2)} = \frac{1}{S\, \mathrm{R}_\lambda} = \frac{\lambda}{e}$$

Dans ce cas :

$$q = h\, (T_1 - T_2)$$

4 - Problème du mur composite sans production de chaleur.

Soit un mur plan de dimensions pratiquement infinies, constitué de n couches de matériaux différents, d'épaisseurs respectives e_1, e_2,....e_n, de conductivités thermiques respectives λ_1, λ_2, ...λ_n et soit T_1, T_2,....T_n les températures prises respectivement par chacune des faces. Comme il n'y a pas de perte ou de production de chaleur q est identique dans tout le solide. Or, nous avons :

$$q = \frac{\lambda_1}{e_1}(T_0 - T_1)$$

$$q = \frac{\lambda_2}{e_2}(T_1 - T_2)$$

....

$$q = \frac{\lambda_n}{e_n}(T_{n-1} - T_n)$$

ou ce qui revient au même :

$$T_0 - T_1 = \frac{e_1}{\lambda_1} q$$

$$T_1 - T_2 = \frac{e_2}{\lambda_2} q$$

....

$$T_{n-1} - T_n = \frac{e_n}{\lambda_n} q$$

5 - Résistance thermique d’un mur composite.

Soit S la surface de ce mur composite de dimensions grandes par rapport à $d_1 \ldots d_n$. Le flux de chaleur échangé est :

$$\phi = qS = \frac{(T_0 - T_n)S}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \ldots\ldots\ldots \frac{e_n}{\lambda_n}} = \frac{(T_0 - T_n)S}{\sum_n \frac{e_n}{\lambda_n}}$$

Si on désigne par R_λ la résistance thermique du mur :

$$R_\lambda = \sum_n \frac{e_n}{\lambda_n S}$$

Ainsi, la résistance thermique de ce mur est égale à la somme des résistances thermiques de chaque constituant.

6 - Coefficient de transfert d'un mur composite.

Ce coefficient est tel que :

$$q = h(T_0 - T_n)$$

En identifiant avec la formule ci-dessus, on obtient :

$$h = \frac{1}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \dots\dots\dots \frac{e_n}{\lambda_n}}$$

ou encore :

$$\frac{1}{h} = \frac{e_1}{\lambda_1} + \dots\dots\dots \frac{e_n}{\lambda_n}$$

Or nous avons vu que pour un mur simple, le coefficient de transfert est égal à λ/e d'où :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{h_1} + \dots\dots\dots \frac{1}{h_n}$$

7 - Transfert de chaleur entre deux fluides à travers une paroi

Considérons une paroi limitée par une surface S de température T_p, le long de laquelle s'écoule un fluide (figure 3).

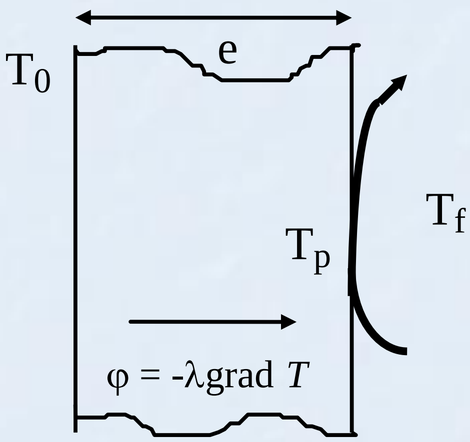


Figure 3 : Cœfficient de transfert entre paroi et fluide.

Supposons le fluide à température uniforme T_f suffisamment loin de la paroi. Au voisinage de cette dernière, cette température varie rapidement jusqu'à la valeur T_p. On défini ici encore le coefficient de transfert de chaleur entre le fluide et la paroi par la relation :

$$q = h\,(T_f - T_p)$$

Dans ce cas, il porte encore le nom de coefficient de convection.
Soit maintenant le cas d'un échange de chaleur entre deux fluides à travers une paroi, comme cela se produit dans un échangeur de chaleur. Supposons qu'un fluide (a) s'écoule le long de la face A de la paroi et un fluide (b) le long de la paroi B
(figure 4). Soit T_a et T_b les températures des deux fluides.

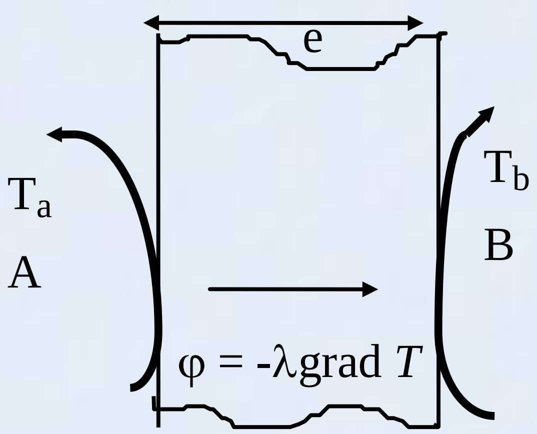


Figure 4 : Ecoulement de fluide de part et d'autre d'une paroi.

Nous supposerons par exemple que $T_b > T_a$. Soient h_a et h_b les coefficients de transfert pour chaque fluide.
Nous pouvons admettre que ce transfert s'effectue à travers un milieu composite et que le coefficient de transfert est alors h tel que :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{h_a} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_b}$$

La densité du flux de chaleur échangé est alors :

$$q = h(T_b - T_a) = \frac{(T_b - T_a)}{\frac{1}{h_a} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_b}}$$

Le flux de chaleur échangé à travers une surface S de paroi est :

$$\phi = qS = \frac{S(T_b - T_a)}{\frac{1}{h_a} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_b}}$$

Ou encore :

$$(T_b - T_a) = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_b}\right)\phi$$

La résistance thermique de l'ensemble est donc :

$$R_\lambda = \frac{1}{S}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_b}\right)$$

Comme $\left(\frac{e}{\lambda\,\mathrm{S}}\right)$ est la résistance thermique de la paroi $\left(\frac{1}{h_a S}\right.$ et $\frac{1}{h_b S}$ sont respectivement les résistances thermiques des deux fluides.

8 - Problèmes du mur simple avec production de chaleur.

Supposons qu'il y ait production de chaleur au sein du milieu. La solution de l'équation générale n'est plus la même, elle devient:

$$T = -\frac{H}{2\lambda}x^2 + Ax + B$$

et

$$q = -\lambda\frac{dT}{dx} = Hx - A\lambda$$

où les constantes A et B dépendent des conditions aux limites.
La répartition des températures est parabolique. Si e est l'épaisseur du mur, on constate que la température sur la face avant ($x = 0$) est :

$$T_0 = B$$

et sur la face arrière ($x = e$)

$$T_e = -\frac{H}{2\lambda}e^2 + Ae + B$$

a) Conditions aux limites de Dirichlet

Il sera d'abord supposé que ces températures sont les mêmes sur les deux faces, soit :

$$\begin{cases} T = T_0 \text{ si } x = 0 \\ T = T_0 \text{ si } x = e \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$B = T_0$$

$$-\frac{H}{2\lambda}e^2 + Ae + B = T_0$$

D'où :

$$Ae = \frac{H}{2\lambda}e^2 \quad \text{et} \quad A = \frac{He}{2\lambda}$$

Ainsi la loi de répartition de la température est :

$$T = -\frac{H}{2\lambda}x^2 + \frac{He}{2\lambda}x + T_0$$

La température maximale est au milieu ($x = e/2$) et elle vaut :

$$T_m = -\frac{H}{2\lambda}\frac{e^2}{4} + \frac{H\,e^2}{4\lambda} + T_0$$

$$T_m = T_0 + \frac{H}{\lambda}\frac{e^2}{8}$$

L’écart de température est

$$\delta T = T_m - T_0 = \frac{H}{\lambda}\frac{e^2}{8}$$

La densité du flux de chaleur est alors en tout point :

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = H(x - \frac{e}{2})$$

Elle vaut :

- sur la face avant ($x = 0$)

$$q_0 = -\frac{He}{2}$$

- sur la face arrière ($x = e$)

$$q_1 = +\ \frac{He}{2}$$

- au milieu du mur ($x = e / 2$)

$$q_m = 0$$

Remarquons que l'énergie produite par unité de surface du mur est :

$$P = H\,.V = H.e \text{ (par unité de surface)}$$

Cette énergie est évacuée par les deux faces du mur et également par ces deux faces. Il est donc normal que le module des flux évacués soit de :

$$\frac{p}{2} = \frac{He}{2}$$

- si maintenant les températures sont différentes sur les deux faces soit :

$$T = T_0 \quad si \quad x = 0$$
$$T = T_1 \quad si \quad x = e$$

On obtient :

$$B = T_0$$

$$A = \frac{T_1 - T_0}{e} + \frac{He}{2\lambda}$$

d'où

$$T = -\frac{H}{2\lambda}x^2 + \frac{He}{2\lambda}x + \frac{T_1 - T_0}{e}x + T_0$$

Posons :

$$T_a = -\frac{H}{2\lambda}x^2 + \frac{He}{2\lambda}x \quad \text{et} \quad T_b = \frac{T_1 - T_0}{e}x + T_0$$

D’où :

$$T = T_a + T_b$$

T_a correspond à la loi de répartition de la température pour le mur avec production de chaleur lorsque les deux faces ont la même température 0 et T_b à la loi de répartition de la température pour le mur sans production de chaleur lorsque les faces ont respectivement pour températures T_0 et T_1.

Il en est de même pour la densité du flux de chaleur puisque :

$$q = -\lambda\,\frac{dT}{dx} = H\,x \;+\; \lambda\,\frac{T_1 - T_0}{e} \;-\; \frac{H}{2}\,e \;=\; H(x - \frac{e}{2}) \;-\; \lambda\,\frac{T_1 - T_0}{e}$$

$$q = q_a + q_b = -\lambda\,\frac{dT_a}{dx} - \lambda\,\frac{dT_b}{dx}$$

Conditions aux limites de Newman :

$x=0$, $T= T_0$ et $x=e$, $T=q_1$

Nous avons donc :

$$B = T_0$$

$$+ He - A\lambda = q_1$$

d'où

$$A = -\frac{q_1}{\lambda} + \frac{He}{\lambda}$$

La loi de répartition de la température est donc :

$$T = -\frac{H}{2\lambda}x^2 - \left(\frac{q_1}{\lambda} - \frac{He}{\lambda}\right)x + T_0$$

$$q = Hx + q_1 - He = -H(e - x) + q_1$$

Ainsi la température de la face arrière sera :

$$T_1 = -\frac{H}{2\lambda} e^2 - \left(\frac{q_1}{\lambda} - \frac{He}{\lambda} \right) e + T_0$$

et le flux sur la face avant :

$$q_0 = -He + q_1$$

Dans le cas particulier où l'une des faces serait calorifugée, par exemple la face arrière ($x = e$)

$$q_1 = 0$$

la température est :

$$T = -\frac{H}{2\lambda} x^2 + \frac{He}{\lambda} x + T_0$$

D'où

$$T_1 = -\frac{H}{2\lambda} e^2 + \frac{H}{\lambda} e^2 + T_0 \text{ où } T_1 - T_0 = \frac{H e^2}{2\lambda}$$

et le flux :

$$q = -H(e - x) \text{ d'où } q_0 = -He$$

9 - Analogie électrique dans le cas d'un mur simple avec production de chaleur.

Nous avons vu que, si T_0 et T_1 sont les températures sur les deux parois du mur, nous avons:

$$q_0 = -\frac{H}{2}e - \lambda\frac{T_1 - T_0}{e} \quad \text{et} \quad q_1 = +\frac{H}{2}e - \lambda\frac{T_1 - T_0}{e}$$

Ainsi :

$$T_0 - T_1 = q_0\frac{e}{\lambda} + \frac{H}{2\lambda}e^2$$

et

$$T_0 - T_1 = q_1\frac{e}{\lambda} - \frac{H}{2\lambda}e^2$$

On sait par ailleurs que :

$$q_0 = \frac{\phi_0}{\mathrm{S}} \quad \text{et} \quad q_1 = \frac{\phi_1}{\mathrm{S}}$$

$$T_0 - T_1 = \frac{\phi_0\, e}{\lambda\, \mathrm{S}} + \frac{H}{2\lambda} e^2 = \phi_0\, \mathrm{R}_\lambda + \frac{HeS}{2} \mathrm{R}_\lambda$$

$$T_0 - T_1 = \frac{\phi_1\, e}{\lambda\, \mathrm{S}} - \frac{H}{2\lambda} e^2 = \phi_1\, \mathrm{R}_\lambda - \frac{HeS}{2} \mathrm{R}_\lambda$$

Or *H.e*S est la puissance P produite dans le mur;

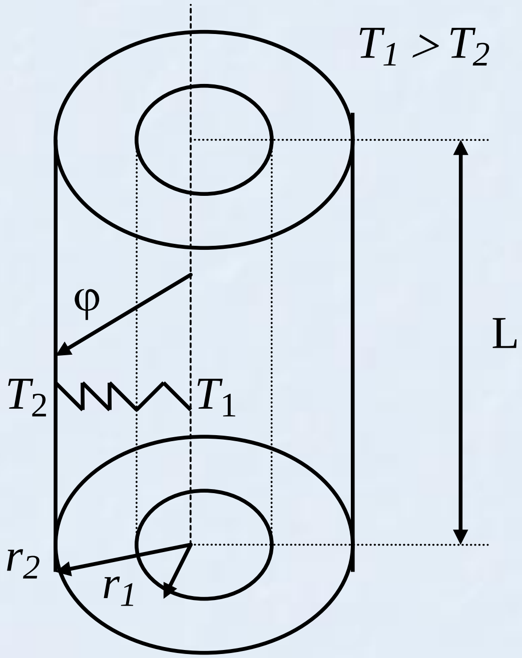
$$T_0 - T_1 = \mathrm{R}_\lambda \left(\phi_0 + \frac{\mathrm{P}}{2}\right) \quad \text{et} \quad T_0 - T_1 = \mathrm{R}_\lambda \left(\phi_1 - \frac{\mathrm{P}}{2}\right)$$

Ainsi

$$T_0 - T_1 = \mathrm{R}_\lambda \left(\frac{\phi_0 + \phi_1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \phi_1 = \phi_0 + \mathrm{P}$$

II - PROBLEME DU CYLINDRE

1- cylindre simple sans production de chaleur



C'est le problème du transfert par conduction en régime permanent dans une tuyauterie cylindrique sans source interne de chaleur. Soit r_1 et r_2 les rayons intérieur et extérieur du cylindre (Figure 5 ci-contre).

Figure 5 : cylindre creux avec les conditions Dirichlet

Nous cherchons simplement la répartition des températures dans le tube ($r_1 < r < r_2$) et l'expression du flux de chaleur par mètre de longueur de la canalisation.

- Détermination du champ de température :

Par raison de symétrie les isothermes sont des cylindres coaxiaux, et la température n'est fonction que du rayon r.
S'il n'y a pas de dégagement interne de chaleur (P = 0) et si λ est constante, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\Delta T = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{d^2T}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(r\dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}}\right) \end{cases}$$

La solution de cette équation différentielle est du type :

$$T = A \log r + B$$

a) Conditions aux limites de Dirichlet :

Le tube est parcouru par un fluide et la face intérieure ($r = r_1$) est prise à la température T_1. La face extérieure ($r = r_2$) est à la température T_2.

$$\begin{cases} r = r_1 & T = T_1 \\ r = r_2 & T = T_2 \end{cases}$$

Remarque :

Nous laissons de côté les échanges par convection et par rayonnement dus aux échanges de chaleur entre le fluide qui circule à l'intérieur du tube et la paroi interne d'une part et les échanges extérieurs d'autre part (conditions aux limites de FOURIER).

A et B sont deux constantes que nous calculons à l'aide des conditions aux limites du problème.
Le champ de température est alors donné par l'expression :

$$T = \frac{T_1 - T_2}{Log\,\frac{r_1}{r_2}} Log\, r + \frac{T_2\, Log\, r_1 - T_1\, Log\, r_2}{Log\,\frac{r_1}{r_2}}$$

Que l'on peut mettre sous la forme :

$$T = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{Log\,\frac{r_1}{r_2}} . Log\frac{r}{r_1}$$

Remarque : Comme dans le problème du mur la répartition de température est indépendante de la valeur du coefficient de conductivité λ lorsque celui-ci est constant.

- Calcul du flux de chaleur par unité de longueur du tube :

Le flux est conservatif. Donc nous le calculerons pour une surface isotherme quelconque de rayon r. L'expression de FOURIER donne :

$$\phi_0 = -2\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{Log \frac{r_1}{r_2}} = 2\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{Log \frac{r_2}{r_1}}$$

2 - Application au calcul de résistance thermique :

Pour une longueur L du cylindre la résistance thermique d'après l'analogie électrique $\delta T = R_\lambda \, \phi$ s'écrit :

$$R_\lambda = \frac{Log \dfrac{r_2}{r_1}}{2\pi \lambda \ \mathrm{L}}$$

- Remarque :

Comme nous l'avons fait dans le cas du mur nous pourrions calculer le flux par unité de longueur de canalisation dans l'hypothèse où λ est fonction de la température.

On définirait alors un coefficient de conductivité thermique moyen λ_m par la formule :

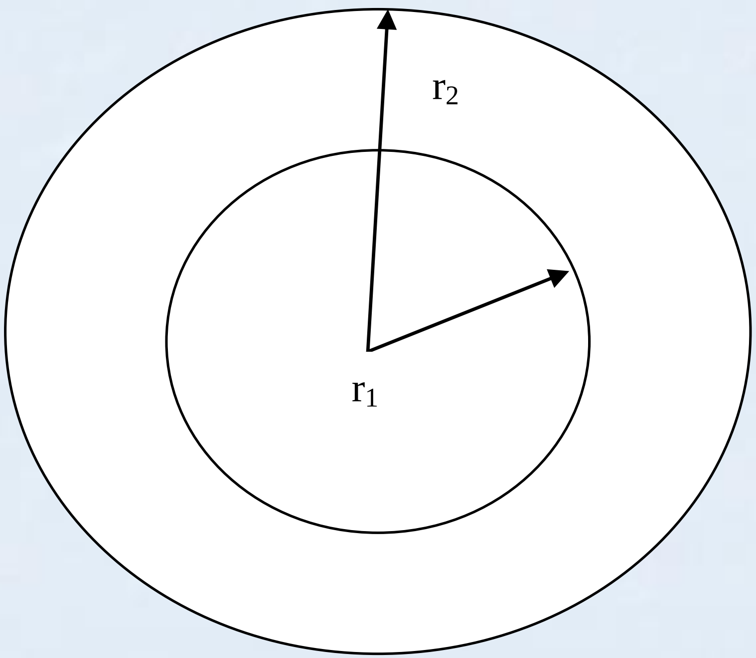
$$\lambda_m = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \lambda\,(T)\, dT$$

ϕ serait donné par l'équation dans laquelle λ a été remplacée par λ_m

III - PROBLEME DE LA SPHERE

1 - sphère creuse

a) conditions aux limites de Dirichlet :



Considérons deux sphères concentriques de rayon r_1 et r_2, limitant un volume de matière sans sources internes de chaleur. Les conditions aux limites de Dirichlet s'écrivent :

$$\begin{cases} r = r_1 & T = T_1 \\ r = r_2 & T = T_2 \end{cases}$$

l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\Delta T = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{d^2T}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dr}^2}(rT) \end{cases}$$

ce qui donne en intégrant :

$$\frac{d\,(rT)}{dr} = A$$

d'où :

$$T = \frac{B}{r} + A$$

Les constantes A et B sont calculées avec les conditions aux limites. Il vient :

$$T = \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1)} \frac{1}{r} + \frac{T_2 r_2 - T_1 r_1}{r_2 - r_1}$$

ou encore :

$$T = T_1 + \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Comme dans le problème du cylindre le flux est conservatif et nous le calculerons pour une isotherme quelconque.

Il vient :

$$\phi = -\lambda \left(\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}}\right)_{\mathrm{r}} 4\pi \ \mathrm{r}^2$$

avec

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{B}{r^2}.$$

$$\phi = 4\pi\lambda \mathrm{B} = 4\pi\lambda \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{(r_2 - r_1)}$$

- Application au calcul de résistance thermique:

L'écart de température entre deux points de la sphère s'écrit :

$$T_1 - T_2 = \frac{(r_2 - r_1)}{r_1\, r_2} \frac{1}{4\,\pi\,\lambda} \phi$$

La résistance thermique de la sphère est donc :

$$R_\lambda = \frac{(r_2 - r_1)}{r_1\, r_2} \frac{1}{4\,\pi\,\lambda}$$

Si la sphère est constituée de n matériaux superposés, de rayons r_0, r_1, ...r_n et de conductivités thermiques λ_1, λ_2.....,λ_n, les résistances thermiques des sphères creuses respectives sont :

$$R_{\lambda 1} = \frac{(r_1 - r_0)}{r_0\, r_1} \frac{1}{4\,\pi\,\lambda_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, R_{\lambda n} = \frac{(r_n - r_{n-1})}{r_n . r_{n-1}} \frac{1}{4\,\pi\,\lambda_n}$$

La résistance thermique de l'ensemble s'écrit :

$$R_\lambda = R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + \ldots\ldots R_{\lambda n}$$

Le flux qui traverse la sphère se déduit donc :

$$\phi = \frac{|T_0 \; - \; T_n|}{R_\lambda}$$

T_0 et T_n désignent respectivement les températures intérieures et extérieures.

b) conditions aux limites de Neumann :

Si la température est imposée sur une face et le flux sur l'autre, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} r = r_1 & T = T_1 \\ r = r_2 & q = q_2 \end{cases}$$

Après avoir calculé les constantes d'intégration A et B, le champ de température la densité du flux s'écrivent respectivement :

$$T = T_1 + \frac{q_2 \, r^2{}_2}{\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) \quad \text{et} \quad q = q_2 \frac{r_2^2}{r^2}$$

2 - Sphère creuse avec production de la chaleur.

Pour simplifier, on suppose que le terme traduisant la production de chaleur H soit constante dans toute la sphère.

L'équation de la chaleur s'écrit dans ce cas :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\ \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} = -\ \frac{H}{\lambda}$$

Ou encore :

$$r^2\ \frac{d^2T}{dr^2} + 2\mathrm{r}\ \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} = -\ \frac{H}{\lambda} r^2$$

En intégrant on obtient :

$$r^2\ \frac{dT}{dr} = -\ \frac{H}{3\lambda} r^3 + A$$

Le champ des températures s'écrit donc :

$$T = -\frac{\mathrm{H}}{6\lambda} r^2 - \frac{A}{r} + B$$

On déduit par suite la densité du flux :

$$q = +\frac{\mathrm{H}}{3} r - \frac{A\lambda}{r^2}$$

A et B sont des constantes d'intégration que l'on détermine par des conditions aux limites.

a) conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} r = r_1 & T = T_1 \\ r = r_2 & T = T_2 \end{cases}$$

Tout calcul fait on obtient :

$$A = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}(T_2 - T_1) + \frac{H}{6\lambda}\; r_2 r_1 (r_2 + r_1)\,,$$

$$B = \frac{r_2 T_2 - r_1 T_1}{r_2 - r_1} + \frac{H}{6\lambda}\; r_2 r_1 (r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)$$

b) conditions aux limites de Neumann :

On impose la température sur une face et le flux sur l'autre.

$$\begin{cases} r = r_1 & T = T_1 \\ r = r_2 & q = q_2 \end{cases}$$

Les constantes d'intégration se déduisent ainsi :

$$A = \frac{H r_2^3}{3\lambda} - \frac{q_2 r_2^2}{\lambda},\quad B = T_1 + \frac{H}{6\lambda\, \mathrm{r}_1}(r_1^3 + 2r_2^3) - \frac{q_2 r_2^2}{\lambda\, \mathrm{r}_1}$$

La détermination des constantes d'intégration permet d'écrire, dans les deux cas de conditions aux limites, la température et du flux en tout point de la sphère

3- Sphère pleine.

Nous rappelons la loi de la répartition de la température

$$T = \frac{B}{r} + A$$

Cette fonction désigne une grandeur physique, c’est à dire qu'elle doit être bien définie et finie en tous points r et en particulier pour r $\rightarrow$ 0, il s’en suit que B est nulle. La température est donc uniforme dans toute la sphère.

$$T = A$$

Dans ces conditions le flux de chaleur est nul à l’intérieur de la sphère.

III - LOI GENERALE DE CONDUCTION A TRAVERS PLUSIEURS CORPS PLACES EN SERIE : DEFINITION DE RESISTANCE THERMIQUE DE CONTACT

1 - Loi d'association

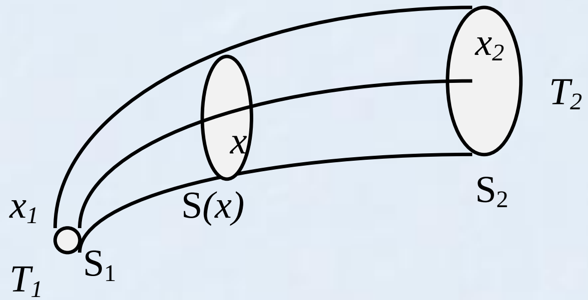


Figure 6

Considérons un tube du flux dans un matériau homogène et isotrope à l'intérieur duquel existe un gradient de température (figure 6). Puisque le flux est conservatif on a pour une surface S(x) :

$$\phi = -\lambda\,(x)\;S(x)(\frac{dT}{dx})_x$$

où $(\frac{dT}{dx})_x$ est la valeur du gradient de température au point considéré.

Nous écrivons l’expression précédente du flux sous la forme :

$$\frac{dx}{\lambda\,(x)\;S(x)} = -\frac{dT}{\phi}$$

En intégrant entre les limites précisées sur la figure 6 il vient :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda\,(x)\;S(x)} = \frac{T_1\ -\ \mathrm{T}_2}{\phi}$$

2 - Définitions : résistance thermique - conductance thermique

Par définition on appellera résistance thermique du tube du flux considéré la quantité :

$$R_\lambda = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda(x)\, S(x)}$$

La conductance thermique est définie comme l'inverse de résistance :

$$K_\lambda = \frac{1}{R_\lambda}$$

ou encore :

$$R_\lambda = \frac{1}{K_\lambda} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$$

Dans le système d'unité S.I, R_λ la résistance thermique s'exprime en °C/ W.

Remarques et applications pratiques :

On peut, par simple calcul de l'écart de température des faces d'un mur composite, remonter au calcul de sa résistance thermique

Applications techniques :

- Le problème de mur composite a de multiples applications techniques, nous citons par exemple le calcul des revêtements et des isolations des wagons ou chambres frigorifiques et des panneaux composites utilisés dans le bâtiment .
- Les applications techniques pour le problème cylindrique sont aussi multiples et d’une importance considérable. Le meilleur exemple qu’on puisse citer est celui du calcul de l’isolation thermique de canalisations de transport de fluides caloporteurs ou frigorifiques

3 - Résistance thermique de contact

L'expérience montre que lorsque deux matériaux sont en contact les températures de deux faces en regard sont en général différentes. Cela provient soit d'un mauvais contact physique avec interposition d'une couche d'air, soit de présence d'une pellicule d'oxyde, etc..

Cette différence de température notée $\delta T' = T - T'$ peut s'exprimer sous forme d'une résistance thermique de contact R_{tc} donnée par :

$$R_{tc} = \frac{T - T'}{\phi}$$

Lors de l’étude de beaucoup de problèmes de corps associés, cette résistance de contact n’est pas prise en compte soit parcequ’on connaît mal les surfaces de contact, soit par une mauvaise identification des contraintes qui s’exercent sur l’une ou l’autre des deux surfaces. Quant aux mesures expérimentales, elles sont inaccessibles par la difficulté de mesure de la différence de température $\delta T' = T - T'$.

Concernant les matériaux isolants et poreux, ces résistances thermiques de contact peuvent être négligées. Il en est de même pour les matériaux métalliques soudés ou brassées

IV.- ETUDE DE REGIME PERMANENT BIDIRECTIONNEL

- Régime permanent dans une plaque mince

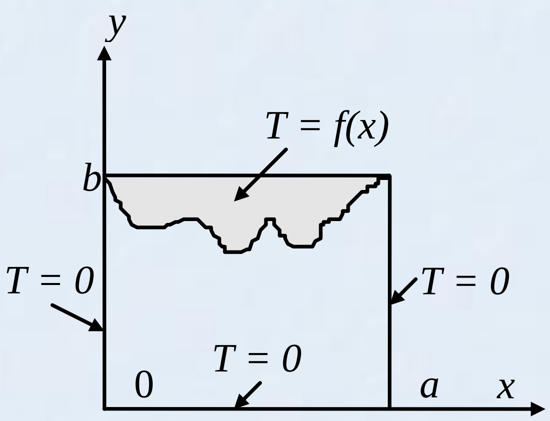


Figure7 : plaque mince

Considérons une plaque mince d'épaisseur *e* où la chaleur s'écoule dans le plan de la plaque; théoriquement ceci est réalisé si les deux faces de la plaque sont isolées thermiquement (figure 7 ci-contre)

Donc le flux est fonction de *x* et *y* et $T = T(x,y,t)$. Les conditions aux limites sont portées sur la figure 7 et ces températures sont maintenues constantes.

En régime permanent on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Cherchons une solution normale de cette équation :

$$T = X(x)\,.Y(y)$$

soit :

$$-\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = k^2$$

En effet une fonction de x ne peut égaler une fonction de y que si elle est constante.
On a donc à résoudre le système :

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - k^2\, Y = 0 \text{ admet comme solution } \quad Y = B_1 \text{ sh ky} + B_2 \text{ ch ky}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2\, X = 0 \text{ admet comme solution } \quad X = B_3 \text{ sin kx} + B_4 \cos kx$$

le champ de température s'écrit donc :

$$T(x,y) = (B_1 \text{ sh ky} + B_2 \text{ ch ky})(B_3 \sin kx + B_4 \cos kx)$$

B_1, B_2, B_3, B_4 se déterminent à partir des conditions aux limites par exemple Dirichlet :

$$\begin{cases} x = 0 \quad T = 0 \quad \text{(quel que soit } y\text{)} & (1) \\ x = a \quad T = 0 \quad \text{(quel que soit } y\text{)} & (2) \\ y = 0 \quad T = 0 \quad \text{(quel que soit } x\text{)} & (3) \\ y = b \quad T = f(x) & (4) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow B2\,(B_3 \sin kx + B_4 \cos kx) = 0 \text{ pour tout } x \rightarrow B_2 = 0$$

$$T(x,y) = B_1\, sh\, ky\,(B_3 \sin kx + B_4 \cos kx)$$

$$(1) \rightarrow B_1 B_4\, sh\, ky = 0 \text{ pout tout } y\text{, entraine que le produit } B_1 B_4 = 0$$

$$T(x,y) = B\, sh\, ky . \sin kx; \quad (B = B_1 B_3)$$

$(2) \rightarrow 0 = B\, sh\, ky .\ \sin kx$ (y est quelconque); $\sin ka = 0$ qui admet comme solutions :

$$k_n = \frac{n\pi}{a} \text{ avec } n = 1, 2, 3, ...$$

$$T(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ sh\,(k_n\, y) .\ \sin(k_n\, x)$$

T (x,y) est donc une combinaison linéaire de différentes solutions.

$$(4) \rightarrow y = b, \quad T = f(x) \rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \ sh(k_n \ b) \ . \ \sin(k_n \ x)$$

En utilisant les fonctions orthogonales, on a :

$$B_n \ sh(k_n \ b) = c_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x) \ \sin(k_n \ x) dx$$

$$\text{donc } T(x,y) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh\left(\frac{n\pi \ y}{a}\right)}{sh\left(\frac{n \ \pi \ b}{a}\right)} \sin \frac{n \ \pi \ x}{a} \int_0^a f(x) \ \sin\left(\frac{n \ \pi \ x}{a}\right) dx$$

Cas particulier de 4 bords à température constante

Si $T = f(x) = T_o$ = constante, on a :

$$\frac{T(x,y)}{T0} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(1-(-1)^n)}{n\pi}\right)\frac{sh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{sh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

On peut ensuite trouver les isothermes en donnant à T différentes valeurs :

$T = T_1, T_2, ...$

Nous remarquons qu'il est difficile de trouver une solution ***analytique*** pour les problèmes à deux dimensions; pour les problèmes à trois dimensions les calculs deviennent vite inextricables et l'on doit faire appel à des méthodes numériques.

Remarque 1: Problème à deux et à trois dimensions- autres systèmes de coordonnées

Le Laplacien en Coordonnées cylindriques :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (1)$$

Donc la température dépend de deux variables r et φ

$$T(r,\varphi) = R(r).\phi(\varphi) \qquad (2)$$

En reportant (2) dans (1) on a :

$$r^2 \frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\phi''}{\phi} = k^2 \qquad (3)$$

D’où le système d’équations :

$$\begin{cases} r^2 R'' + rR' - k^2 r = 0 \\ \phi'' + \phi k^2 = 0 \end{cases}$$

(4)

et a pour solutions :

$$\begin{cases} R = Cr^k + Dr^{-k} \\ \phi = Ae^{ik\varphi} + Be^{-ik\varphi} \end{cases} \tag{5}$$

A, B, C, et D sont des constantes d’intégration à déterminer par les conditions aux limites.

***Remarque 2**:* Problème à 3 dimensions :

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Donc la température dépend de trois variables *X*, *Y* et *Z*

$$T(x,y,z) = X(x).Y(y).Z(z) \qquad (7)$$

En reportant (7) dans (6) on d'équation :

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{z} = 0 \qquad (8)$$

ou encore

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = k_3^2 = cte \qquad (9)$$

$$Z'' + k_3^2 Z = 0 \qquad (10)$$

Et $$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = k_3^2 \rightarrow \frac{X''}{X} = k_3^2 - \frac{Y''}{Y} = k_2^2 \qquad (11)$$

d'où le système d'équations :

$$\begin{cases} X'' - k_2^2 X = 0 \\ Y'' - k_1^2 Y = 0 \end{cases} \qquad k_1^2 = k_3^2 - k_2^2$$

Le problème se ramène donc à celui de deux variables X et Y

Remarque 3: Solution en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \Delta T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \\ T = T(r, \varphi, z) = R(r).\phi(\varphi).Z(z) \end{cases}$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\phi''}{\phi} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

Problème est celui de trois dimensions. Pour le résoudre analytiquement voir remarque 2.

Exercices sur le chapitre 2

Exercice 1 : différents modes d'isolation de parois de bâtiment

L'un des murs d'un appartement a 4 mètres de long, 3 mètres de haut et 0,20 mètres d'épaisseur. On suppose que la température extérieure est de 0°C et celle à l'intérieure de la pièce est de 20°C. Ces deux températures sont maintenues constantes. Calculer le flux de chaleur à travers le mur de cet appartement dans les trois cas suivants :

a) Mur constitué de briques
b) Mur composite constitué de briques et plaques de liège de 2 cm d'épaisseur.
c) Mur composite constitué de deux parois en briques séparées par une lame d'air immobile de 4 cm d'épaisseur.

Conclusion.

On donne : Conductivité thermique de la brique $\lambda_b = 2.10^{-4}\ kcal/m.s.°C$

Conductivité thermique du liège $\lambda = 0.035\ W/m.°C$

Exercice 2: Isolation des fours

Un four est construit avec une paroi formée de deux couches. La couche intérieure est constituée en briques en argile réfractaire de 112 mm d'épaisseur et la couche extérieure en brique de bâtiment de 225 mm d'épaisseur. En régime permanent la température de la surface intérieure des briques réfractaires est 685°C alors que la température à la surface extérieure des briques rouges est 121°C

Afin de réduire les pertes de chaleur, on ajoute aux briques rouges une couche isolante de magnésie $(\lambda = 0{,}07 kcal / h.m°C)$ de 50 mm d'épaisseur. Les températures mesurées en régime établi sont les suivantes : 713°C à la surface intérieure des briques réfractaires, 655°C à l'interface entre les briques réfractaires et les briques rouges, 490°C à la surface de contact entre les briques rouges et la magnésie et 77°C à la surface extérieure de la couche de magnésie.

1. Calculer les différentes résistances thermiques.
2. Calculer la densité de flux de chaleur transmise à travers le mur avec et sans la couche isolante de magnésie.
3. Déterminer en % la diminution de la densité de flux de chaleur transféré par suite de revêtement isolant.
4. On supposera en première approximation que les conductivités thermiques des briques de bâtiment et des briques réfractaires sont indépendantes de la température. Déterminer ces conductivités ?

.

Exercice 3: Technique de fabrication de feuille de plastique

Dans une opération de fabrication une grande feuille de plastique ($\lambda_p = 1,93 kcal / h.m.°C$) de 12,5 cm d'épaisseur doit être collée à une feuille de liège agglomérée ($\lambda_l = 0,25 kcal / h.m.°C$) de 25 cm d'épaisseur. Pour exécuter l'opération, la colle doit être maintenue à la température de 43°C, pendant une durée de temps notable.
Ceci est réalisé par une source de chaleur rayonnante agissant uniformément sur la surface du plastique. Les faces du liège et du plastique exposé à l'air ont un coefficient d'échange de chaleur par convection égal à $9,7\ kcal/h.m^2°C$ et la température de la salle pendant l'opération est 21°C.
En négligeant les pertes de chaleur par rayonnement à partir des feuilles,

1. Evaluer la résistance thermique de l'ensemble liège – air.
2. Evaluer la densité de flux de chaleur à fournir à la surface du plastique pour obtenir la température voulue à l'interface.
3. Calculer la température de la face recevant le flux rayonnant.
4. Calculer les autres flux de chaleur.

   On suppose que la résistance thermique de contact de la colle peut être négligée.

Exercice 4: Problème des échangeurs

La paroi d’un échangeur de chaleur est constituée d’une plaque de cuivre de 9,5 mm d’épaisseur. Les coefficients d’échange de chaleur sur les deux côtés de la plaque sont de *2340* et *6100* $kcal/h.m^2.°C$ correspondant respectivement aux températures de 82°C et 32°C du fluide.

En supposant que la conductivité thermique de la paroi est *327* $kcal/h.m°C$,

1. Evaluer la résistance thermique de l’ensemble ?
2. Evaluer la densité de flux de chaleur ?
3. Calculer les températures des surfaces ?

Exercice 5 : Etude d’un capteur solaire à eau

Un simple four solaire est constitué d’une plaque de verre au-dessous de laquelle est placée une cuvette peu profonde remplie d’eau jusqu’au contact de la plaque. La densité des rayons solaire passent à travers la plaque de verre est *422 kcal/h.m²*. La température de l’eau est 93°C et celle de l’air ambiant est 27°C.
En supposant que les coefficients d’échange de chaleur entre l’eau et la plaque de verre, et entre la plaque de verre et l’air sont respectivement égaux à *24,4 kcal/h.m²°C* et 5*,86 kcal/h.m²°C.*

1. Calculer toutes les résistances thermiques.
2. Le flux de chaleur transféré de l’eau vers l’air.
3. flux de chaleur absorbé.
4. le temps nécessaire pour transférer les *271,2 kcal/m²* à l’eau de la cuvette.

La cuvette est supposée isolée à sa base et que la résistance thermique de la lame de verre est négligeable.

Exercice 6 : Etude de l'isolation thermique d'une centrale nucléaire

L'écran protecteur d'un réacteur nucléaire peut être stylisé par une grande plaque plate de 25 cm d'épaisseur ayant une conductivité thermique de $\lambda_e = 2{,}96\ kcal/hm°C$. Le rayonnement à partir de l'intérieur du réacteur pénètre dans l'écran et engendre une production de chaleur qui décroît exponentiellement de la valeur $0{,}15\ kcal/h.cm^3$ à $0{,}015\ kcal/h.cm^3$ lorsqu'on passe de la surface intérieure à une distance 12,5 cm de cette surface.

1. Donner une loi qui traduit la production de chaleur H(x) ?
2. Donner la loi de distribution de la température de l'écran protecteur ?
3. Déterminer la température à la surface intérieure de l'écran sachant que la surface extérieure est refroidie à 38°C par convection forcée.

On admettra que la densité de flux provenant de l'intérieur est nulle.

Exercice 7 : Etude de l'isolation Thermique des fils électriques

Exemple 1 : **Barre conductrice** *(facultatif)*

Dans une barre cylindrique de diamètre d, constituée d'un métal de résistivité électrique et de conductivité thermique λ, circule un courant électrique I.

1. Calculer la puissance calorifique dégagée par effet Joule par unité de volume ?

2. Calculer la différence de température de la surface extérieure et celle de l'axe du cylindre ? Indiquer comment varie cette différence avec la nature du métal. Le diamètre de la barre de la barre et l'intensité du courent.

3. Application numérique : d= 1 cm, I=500 A

- **a)** cas de la barre en cuivre : $\rho = 1,7 \mu\Omega cm,\ \lambda = 0,1 kcal\ / m.\,s.°C$
- **b)** cas de la barre en graphite : $\rho = 6.10^{3}\ \mu\Omega cm,\ \lambda = 4.10^{-3}\ kcal\ / m.\,s.°C$

Exemple 2 : cas d'un câble électrique

Un câble électrique de 12 mm de diamètre extérieur est maintenu à la température $T_S = 66°C$.

1. Calculer le flux de chaleur échangé par unité de longueur de câble avec l'air ambiant à 21°C si le coefficient d'échange par convection est de *7,44 kcal/h.m²°C*
2. On veut isoler le câble avec un revêtement en caoutchouc d'épaisseur r et de conductivité thermique $\lambda=0{,}134$ *kcal/h.m.°C*. Calculer en fonction de r, la résistance thermique totale R_T. En déduire valeur du rayon critique r_c (correspondant à l'écart minimal de température $\frac{\partial R_T}{\partial r} = 0$) de cette isolation.

   Calculer à nouveau le flux échange en présence de l'isolant de rayon r_c ?
3. Conclusion.
4. Calculer l'épaisseur r_0 du caoutchouc nécessaire pour que le flux échangé avec l'extérieur soit le même que celui sans isolation. Pour répondre à cette question on a intérêt à établira

une relation du type $\ln x + \frac{3}{x} = 3$ avec $x = \frac{r_0}{6.10^{-3}}$ et qui aadmet comme solution $x_0 = 16{,}8$

Fin du chapitre