

MODELISATION ET SIMULATION NUMERIQUE DES SYSTEMES ENERGETIQUES PAR ELEMENTS ET VOLUMES FINIS

Partie : volumes finis

TABLE DES MATIERES

Chapitre : 1

I-INTRODUCTION	2
II-FORMULATION DU PROBLEME A RESOUDRE	3
II-1. Type de problèmes.....	3
II-2. Mise en équations.....	3
III-FORMULATION GENERALE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE CONSERVATION	4
III-1. Remarque.....	4
III-2. Forme générale d'une équation de conservation.....	4
IV- DISCRETISATION DE L'EQUATION GENERALE DE CONSERVATION	6
IV-1. DOMAINE DE DISCRETISATION.....	6
IV-2. DISCRETISATION.....	7
2.1- Discrétisation de l'équation de conservation générale.	7
2.2 -Calcul des termes de type $J_{xe} - Ue\phi_P$ valable pour les faces (e et n).....	9
2.3-Calcul des termes de type $J_{xs} - Us\phi_P$ valable pour les faces (s et w).....	10
2.4 - Calcul <i>exacte</i> du flux généralisé (solution exacte)	11
2.5- Linéarisation du terme source	12
2.6- Discrétisation de l'équation à deux dimensions	13

Chapitre 2

1- DISCRETISATION DES EQUATIONS _____	17
1.1- Choix du maillage _____	17
1.2- Discrétisation des équations de conservation sur un volume fini _____	19
2- TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES _____	20
2.1- Conditions aux limites à la paroi _____	20

2.1.1-Vitesse :	20
2.1.2-Température	21
2.2- Sortie	22
2.3- Entrée	22
3- METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION	23
4-COUPLAGÉ PRESSION-VITESSE, ALGORITHME DE RESOLUTION	24
4.1. COUPLAGÉ PRESSION-VITESSE	24
4.2. ALGORITHME SIMPLER	24
4.2.1 Algorithme SIMPLE	24
4.2.2. Algorithme SIMPLER	26
4.3. CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA CORRECTION DE PRESSION ET POUR LA PRESSION	27
4.4 SOUS-RELAXATION –CONVERGENCE	29
4.5 TEST DE CONVERGENCE	30
4.6 CONCLUSIONS	30

Chapitre 3 : Applications

Résolution d'un problème de convection libre en 2.D	32
I- Formulation du problème :	32
II- Solution numérique	34
1. Discrétisation des équations gouvernantes par la méthode du volume de contrôle (ou volume finis)	34
a- Equation de mouvement suivant x	36
b- Equation de mouvement suivant y	36
c- Discrétisation de l'équation de l'énergie	37
d- Discrétisation des conditions aux frontières :	37
2-Résolution de équations discrétisées	37
Algorithme de Résolution (SIMPLER →SIMPLEC)	37

Chapitre : 1

I-INTRODUCTION

Les trois grandes méthodes numériques utilisées dans les codes de calculs numériques sont les volumes finis, les différences finis et les éléments finis.

La méthode des différences finis consiste à discrétiser les équations de continues aux nœuds d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide de séries de Taylor tronquées pour obtenir des équations linéaires reliant la valeur des inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux nœuds voisins.

La technique des éléments finis discrétise l'espace à l'aide d'éléments géométriques simples (triangles ou quadrilatères en général). Comme elle permet de modéliser des géométries très complexes, elle est parfois préférée à la méthode des différences finis.

La méthode des volumes finis famille de méthodes numériques reposant sur une partition du domaine en volumes de contrôle, largement décrite par Patankar (1980), consiste à discrétiser le domaine de l'écoulement en une multitude de volumes de contrôle puis d'effectuer des bilans (masse, de quantité de mouvement.....) sur ces petits volumes, pour lesquels seule une valeur moyenne des inconnues est calculée. Pour des lois de conservation, les échanges entre volumes de contrôle se font par l'intermédiaire de flux, de manière automatiquement conservative.

L'avantage déterminant des volumes finis par rapport aux autres méthodes est qu'ils sont conservatifs, tout ce qui sort d'un volume de contrôle entre dans un autre.

Les méthodes de volumes finis sont utilisées depuis longtemps pour la simulation numérique en mécanique des fluides. Elles permettent d'approcher des solutions presque nécessairement discontinues, tout en conservant de bonnes propriétés (conservativité, précision, monotonie, etc...). Ces méthodes ont trouvé une seconde jeunesse avec leur application à l'électromagnétisme, notamment pour les cas hétérogènes, et les applications de la mécanique des fluides où les domaines sont déformables (interactions fluide-structure, écoulements moteur, etc...)

La méthode des volumes finis a été alors proposée pour traiter ces problèmes. Son principe est simple : on considère comme espace d'approximation les fonctions constantes par morceaux, ces morceaux ou cellules ou volumes finis étant choisis par l'utilisateur et issus par exemple d'un maillage de type éléments finis - notamment non structuré- ce qui permet de prendre en compte des géométries complexes. Cette vision des volumes finis est néanmoins réductrice, et fortement influencée par l'approche éléments finis (les volumes finis peuvent être vus comme des éléments finis de type P_0)

Cependant, les méthodes en volumes finis prennent un autre sens quand on s'intéresse à une loi ou à un système de lois de conservation. Les valeurs numériques dans chaque cellule peuvent être vues comme des approximations de valeurs moyennes sur la cellule, dont les variations ne dépendent que des flux aux bords de la cellule. Ainsi, il suffit de construire des fonctions de flux numériques, donnant de bonnes approximations de ce qui passe d'une cellule à ses voisines. Automatiquement, la méthode produite est conservative (ce qui sort d'une cellule rentre exactement dans sa voisine).

Ces méthodes peuvent être appliquées dans la grande majorité des domaines d'application abordés par le projet, des écoulements multi-espèces ou multiphasiques

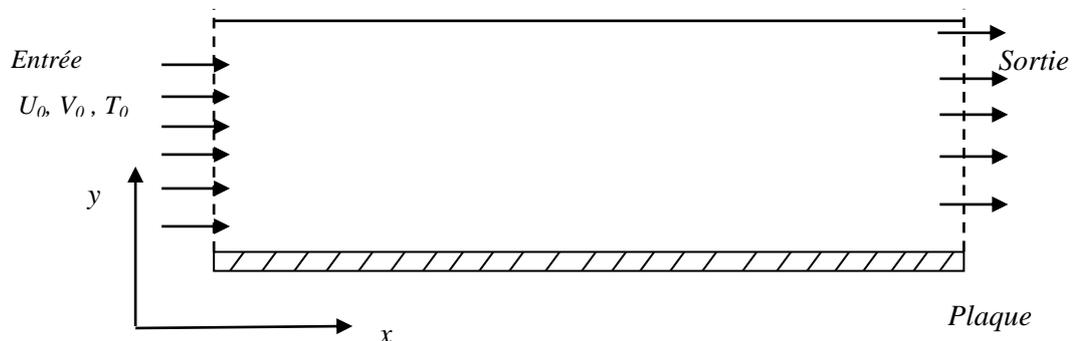
Enfin, il est important de rappeler ici que les méthodes de volumes finis s'adaptent très simplement pour la simulation numérique de lois de conservation en formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE), en maillages dynamiques à topologie constante, passage presque nécessaire pour la simulation de la plupart des interactions fluide-structure (où le domaine fluide, complémentaire de la structure, varie avec le temps).

II-FORMULATION DU PROBLEME A RESOUDRE

II-1. Type de problèmes

Il s'agit d'étudier un problème d'écoulements laminaires et du transfert de chaleur convectif.

Exemple :



- Domaine fluide limité par deux plans parallèles
- Fluide Newtonien incompressible.

Le problème : champs de vitesses, de températures et flux de chaleur échangés.

II-2. Mise en équations

Les équations du mouvement sont celles de l'écoulement plan

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

- Conservation de la quantité de mouvement dans le cas bidimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial p} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

- Conservation d'énergie sans dissipation

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

*Conditions aux limites hydrodynamiques :

- Section d'entrée généralement u,v fixées
- Surface solide u=v=0,
- Section de sortie condition d'écoulement établi $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$

*Conditions aux limites thermiques

- Section d'entrée généralement T fixée
- Section de sortie condition d'écoulement établi $\frac{\partial T}{\partial n}$
- Les parois solides T ou $\frac{\partial T}{\partial n}$ sont fixées

III-FORMULATION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE CONSERVATION

III-1. Remarque

Plusieurs situations pratiques impliquent en même temps des écoulements de fluide, de transfert de chaleur, la turbulence...etc. Ces phénomènes sont régis par les principes de conservation de la masse, quantité de mouvement et d'énergie. Ces principes sont exprimés sous forme d'équations différentielles, tous possédant une forme commune. L'intérêt de cette forme est de rendre plus commode la présentation des méthodes numériques... . La présentation mathématique basée sur une seule équation différentielle générale facilite la construction de la méthode numérique et rend possible aussi le développement d'un code de calcul général.

III-2. Forme générale d'une équation de conservation

Une équation différentielle de conservation peut être présentée en notation tensorielle cartésienne, sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\Gamma_\phi}{\sigma_\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + (S_\phi + R_\phi) \quad (1)$$

Dans cette équation, ϕ est la variable dépendante généralisée par unité de volume, Γ_ϕ est coefficient de diffusion généralisé et $(S_\phi + R_\phi)$ le terme source. Les quantités Γ_ϕ et $(S_\phi + R_\phi)$ sont spécifiques à chaque variable ϕ . L'équation différentielle totale est constituée de quatre termes, respectivement le terme d'accumulation, le terme de transport convectif, le terme de transport diffusionnelle et le terme source.

Variable généralisée :

ϕ représente la variable généralisée, elle peut représenter les différentes quantités physiques. Si l'équation générale est supposée représenter la conservation de la quantité de mouvement, alors ϕ

est interprétée comme la composante U_j , de même ϕ peut représenter la température, la masse ou autres variables. Chaque ϕ est accompagnée de l'expression de Γ_ϕ , de $(S_\phi + R_\phi)$ et de condition aux limites spécifiques.

Coefficient de diffusion :

Γ_ϕ est le coefficient de diffusion dans l'équation différentielle générale pour ϕ , il exprime la propriété de transport comme la viscosité ou la diffusivité, conjointement avec le gradient de la variable appropriée ϕ .

Terme source :

Le terme source $(S_\phi + R_\phi)$ exprime le processus de production (destruction) interne comme la génération de chaleur dans le fluide. Il contient deux termes de même nature mais d'origines différentes, le terme (S_ϕ) est dû aux interactions des couches fluides entre elles, alors que le terme (R_ϕ) est dû aux interactions des couches fluides avec des obstacles solides présents dans l'écoulement.

Le terme source dans l'équation de quantité de mouvement inclut le gradient de pression, les forces volumiques et la contribution des termes de viscosité qu'on ne peut pas introduire dans le terme de diffusion. De cette manière, $(S_\phi + R_\phi)$ sert à englober toutes les quantités qu'on ne peut pas introduire dans les autres termes.

**TABLEAU RECAPITULATIF
DES EQUATIONS DE CONSERVATION**

Pour un écoulement laminaire de fluide visqueux sans présence d'obstacles ni génération de chaleur

conservation	ϕ	Γ_ϕ	σ_ϕ	S_ϕ	R_ϕ
Masse	1	0	∞	0	0
Vitesse suivant La direction x_j	U_j	$\frac{\mu_e}{R_e}$	1	$\frac{\partial P}{\partial x_j}$ $+ \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_e \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \right]$	0
Energie dans le fluide	T	$\frac{\lambda_e}{P_e}$	1	0	0

Ce modèle est applicable au calcul des écoulements laminaires et du transfert de chaleur convectif.

Le modèle est constitué de 5 équations aux dérivées partielles non-linéaires et couplées. Leur résolution nécessite une méthode numérique.

IV- DISCRETISATION DE L'EQUATION GENERALE DE CONSERVATION

Dans le but d'alléger la présentation de la résolution du système d'équations de conservation nous nous proposons de résoudre l'équation générale de conservation sur un domaine physique. Pour cela nous présentons *la méthode de discrétisation, la discrétisation et la linéarisation du terme source* et nous proposons *une méthode de résolution mathématique*.

IV-1. DOMAINE DE DISCRETISATION

La méthode numérique qu'on se propose de décrire ici est basée sur la formulation volume de contrôle. Le domaine physique est divisé en un nombre fini d'éléments de volume, où les variables telles que pression, température, vitesse sont calculées. La subdivision du domaine en volumes de contrôle et l'association d'un réseau (maillage) de points sont schématisés sur la figure 1.

Les lignes en gras indiquent les faces de volumes de contrôle, deux cas sont possibles

- Maillage à volume complet à la frontière, les (o) sont les centres des volumes de contrôle
- Maillage à demi volume à la frontière, les (●) sont au centre des volumes de contrôle.

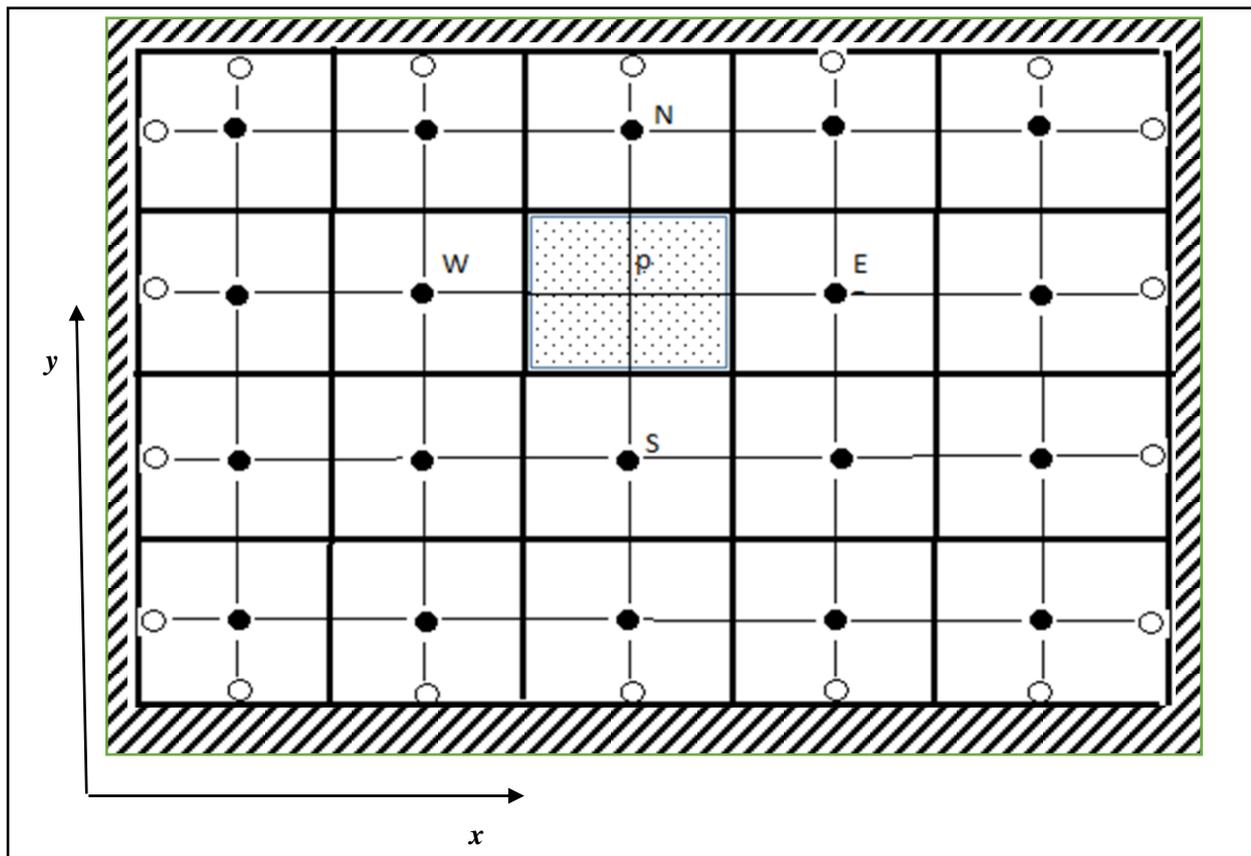


Figure 1 : Maillage et volume de contrôle

La plupart des propriétés physiques du fluide sont constantes sur le volume de contrôle. Cependant il est souhaitable de placer les faces des volumes de contrôle là où il y a discontinuité des propriétés du fluide ou du terme source et de préférence là où les conditions aux limites sont définies. Après que la

position des faces des volumes de contrôles ait été décidée les nœuds sont placés aux centres des volumes de contrôle.

Considérons le volume de contrôle type sur la figure ci-dessus placé autour du point P. Il communique avec les quatre volumes voisins à travers les quatre faces. Les centres des volumes de contrôle voisins sont notés E, W, N et S pour indiquer Est, Ouest, Nord et Sud. Il n'est souvent désirable d'utiliser un maillage non uniforme, car pour une utilisation optimale d'un même nombre de points on peut mettre plus de points là où la variable ϕ varie rapidement et moins de points où ϕ varie peu.

IV-2. DISCRETISATION

La discrétisation est réalisée en intégrant l'équation différentielle sur un volume élémentaire appelé volume de contrôle (volume fini).

2.1- Discrétisation de l'équation de conservation générale.

La base de la méthode numérique est la conversion de l'équation différentielle (1), en équation algébrique reliant la valeur de ϕ au point P aux valeurs de la variable aux points voisins. Ceci est réalisé par l'intégration de l'équation (1) sur le volume de contrôle centré au point P et l'approximation des différents termes dans l'intégration par des expressions fonctions de la variable ϕ .

Pour l'intégration de cette équation sur le volume de contrôle considéré, il convient d'introduire la notion de flux généralisé (convection et diffusion).

On appelle flux généralisé suivant la direction i la quantité J_i définie par :

$$J_i = U_i \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (2)$$

L'équation différentielle (1) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (J_i) = (S\phi) \quad (3)$$

Le volume de contrôle sur lequel on va intégrer notre équation est le volume de contrôle schématisé sur la figure 2, centré au point P, il est limité par les quatre faces désignées par e, w, n, s et son volume est ΔV .

Par intégration de l'équation (3) sur le volume de contrôle considéré, on a obtenu l'équation algébrique (4) en ϕ_p fonction des termes sur les faces. La valeur de $J_x(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x})$ est constante sur les faces Est et Ouest du volume de contrôle, la valeur de $J_y(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial y})$ est constante sur les faces Nord et Sud, et la valeur de $(\overline{S\phi} + \overline{R\phi})$ est constant sur l'ensemble du volume de contrôle. Ceci est justifié par le fait que les valeurs utilisées sont des valeurs moyennes sur la surface ou dans le volume.

$$J_{x_e} A_e - J_{x_w} A_w + J_{y_n} A_n - J_{y_s} A_s = (\overline{S\phi}) \Delta V \quad (4)$$

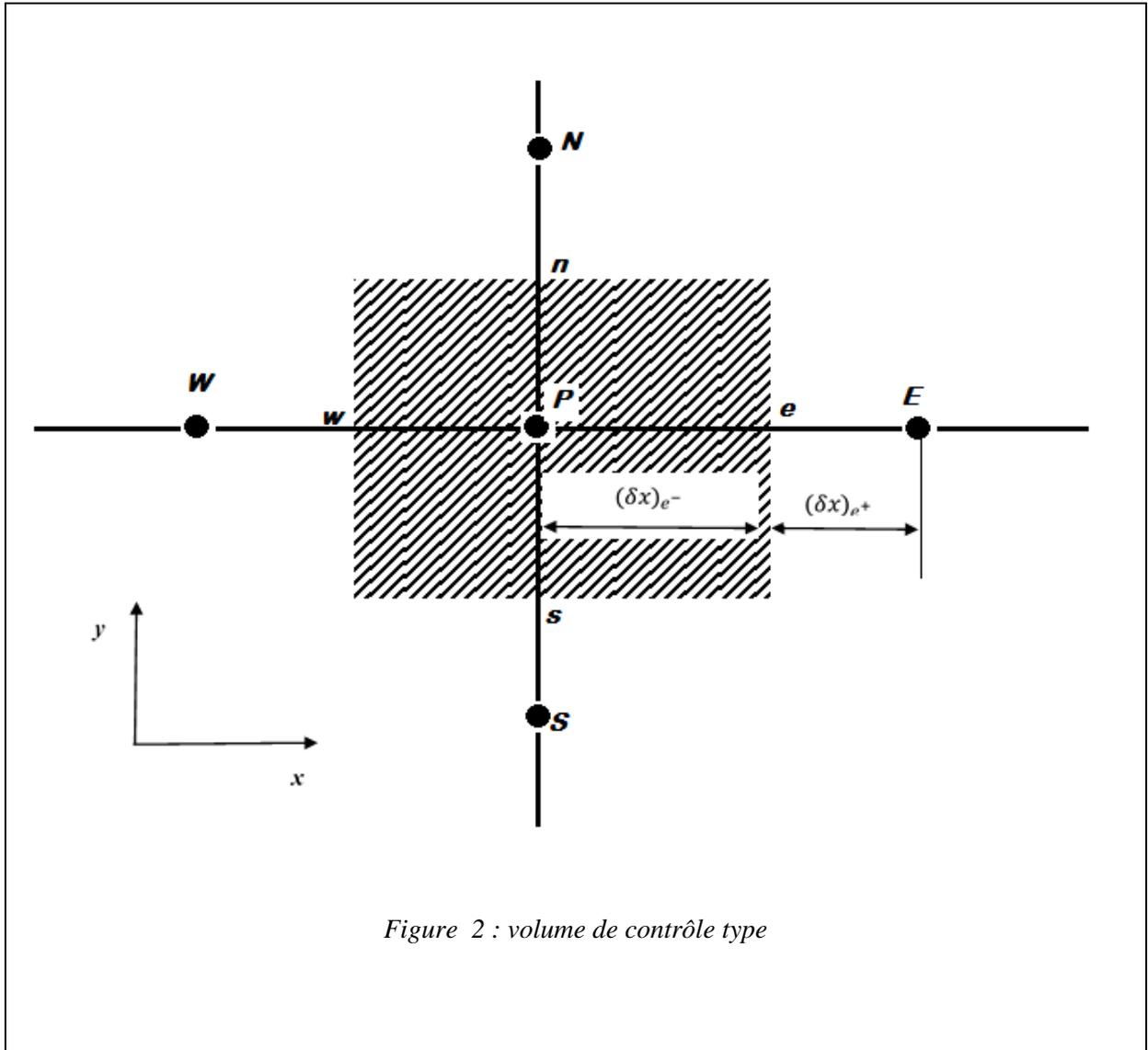


Figure 2 : volume de contrôle type

La discrétisation de l'équation de continuité sur le même élément de volume donne :

$$(U_e - U_w)A_e + (U_n - U_s)A_n = 0 \quad (5)$$

Avec ϕ_P^0 : valeur de ϕ_P à l'instant t

ϕ_P : Valeur de ϕ_P à l'instant t + Δt

$A_{(e,w,n,s)}$: représentent les aires des différentes faces du volume de contrôle.

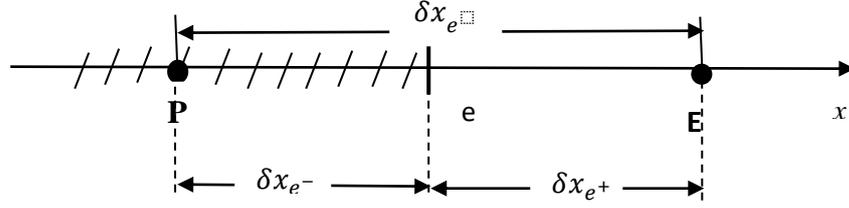
En multipliant (5) par ϕ_P et en la soustrayant de (4) on obtient :

$$(J_{x_e} - U_e \phi_P)A_e - (J_{x_w} - U_w \phi_P)A_w + (J_{y_n} - U_n \phi_P)A_n - (J_{y_s} - U_s \phi_P)A_s = (\overline{S\phi})\Delta V \quad (6)$$

Nous avons présenté la discrétisation dans le cas bidimensionnel mais l'idée peut facilement s'appliquer à d'autres cas (mono-ou tridimensionnel).

2.2 - Calcul des termes de type $J_{x_e} - U_e \phi_P$ valable pour les faces (e et n)

Considérons l'élément linéaire suivant P-E :



On pose $J_x^* = \frac{J_x \delta x}{\Gamma_\phi}$ flux généralisé réduit, on utilisant la définition de J_i , on peut écrire

$$J_x^* = \frac{U_i \delta x}{\Gamma_\phi} \phi - \delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} = P_e \phi - \delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7)$$

P_e : Nombre de Peclet.

La discrétisation de J_x^* sur l'élément de module P-E donne :

$$J_x^* = \frac{U_i \delta x}{\Gamma_\phi} \phi - \delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} = P_e \phi_e - \delta x \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x} \right) \quad (8)$$

Soit encore

$$J_x^* = P_e \phi_e - (\phi_E - \phi_P) \quad (9)$$

Où ϕ_e est la valeur de ϕ au point e. ce point n'est pas un nœud du maillage de ϕ , la valeur de celle-ci est donc inconnue et il faut le déduire par interpolation entre les valeurs aux nœuds P et E.

Considérons pour simplifier une variation linéaire de ϕ entre ϕ_E et ϕ_P , la valeur de ϕ au point e est donnée par :

$$\phi_e = f \phi_P + (1 - f) \phi_E \quad (10)$$

f : facteur géométrique de pondération

$$f = \frac{\delta x_{e+}}{\delta x_e}$$

L'équation (9) devient :

$$J_x^* = P_e (f \phi_P + (1 - f) \phi_E) - (\phi_E - \phi_P) = B \phi_P - A \phi_E \quad (11)$$

$$\text{avec } \begin{cases} B = P_e f + 1 \\ A = P_e (f - 1) + 1 \end{cases} \quad (12)$$

Ces deux termes ont les propriétés suivantes :

- Dépendance : $B = A + P_e$
- Symétrie : $A(\pm P_e) = B(\mp P_e)$ (c'est-à-dire si on inverse le sens des axes, A jouera le rôle de B et vice versa)

D'après ces deux propriétés, il suffit de connaître une des deux fonctions (A ou B) seulement et pour des nombre de Peclet positifs ($P_e > 0$), l'autre s'en déduit aisément.

En effet si **Peclet est négatif** ($P_e < 0$), on a d'après la première propriété :

$$A(P_e) = B(P_e) - P_e \quad (13)$$

Et d'après la seconde :

$$B(P_e) = A(-P_e) \quad (14)$$

En remplaçant B dans (13) par son expression (14), on obtient :

$$A(P_e) = A(-P_e) - P_e \quad (15)$$

Et comme la valeur absolue d'une valeur négative est égale à moins la valeur elle-même :

$$A(P_e) = A(|P_e|) - P_e \quad (16)$$

D'une manière générale on peut mettre la relation (16) sous la forme valable pour tous les nombres de Peclet P_e (<0 ou >0) :

$$A(P_e) = A(|P_e|) + \text{Max}(0, -P_e) \quad (17)$$

Revenons au calcul du flux réduit J_x^* relation (11) en utilisant les propriétés de dépendance et symétrie plus haut :

$$J_x^* = A(P_e)\phi_P + P_e\phi_P - A(P_e)\phi_E = P_e\phi_P + A(P_e)(\phi_P - \phi_E) \quad (18)$$

Soit

$$J_x^* - P_e\phi_P = A(P_e)(\phi_P - \phi_E) \quad (19)$$

Et le flux de quantité de mouvement se déduit facilement par :

$$J_x^* - P_e\phi_P = \frac{J_x \delta_{x_e}}{\Gamma_e} - P_e\phi_P = A(P_e)(\phi_P - \phi_E) \quad (20)$$

$$\text{Et} \quad J_{x_e} - U_e\phi_P = \frac{\Gamma_e}{\delta_{x_e}} A(P_e)(\phi_P - \phi_E) \quad (21)$$

Avec A_e section de passage du flux

$$(J_{x_e} - U_e\phi_P)A_e = A_e \frac{\Gamma_e}{\delta_{x_e}} A(P_e)(\phi_P - \phi_E) \quad (22)$$

$$\text{On pose} \quad (J_{x_e} - U_e\phi_P)A_e = a_e(\phi_P - \phi_E)$$

Avec δ_{x_e}

$$a_e = A_e \frac{\Gamma_e}{\delta_{x_e}} A(P_e) = D_e A(|P_e|) + \text{Max}(0, -F_e) \quad (23)$$

Où $D_e = A_e \frac{\Gamma_e}{\delta_{x_e}}$: conductance diffusionnelle.

Et $F_e = D_e P_e = U_e A_e$: conductance convectionnelle.

On constate que les conductances F_e et D_e restent encore localisées au point e qui n'est pas un nœud du maillage et donc on a besoin d'interpoler entre les points P et E pour les calculer.

2.3-Calcul des termes de type $J_{x_s} - U_s\phi_P$ valable pour les faces (s et w)

On suivra le même raisonnement que précédemment en utilisant un élément linéaire **S-P**, ce qui revient à changer le sens de l'axe et à changer la fonction d'interpolation A par B.

$$B(P_e) = A(|P_e|) + \text{Max}(0, P_e) \quad (24)$$

Où seul le signe du nombre de Peclet à l'intérieur de la fonction Max a changé. Les conductances globales sont données par :

$$a_s = A_s \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} B(P_e) = D_s A(|P_e|) + \text{Max}(0, F_e) \quad (25)$$

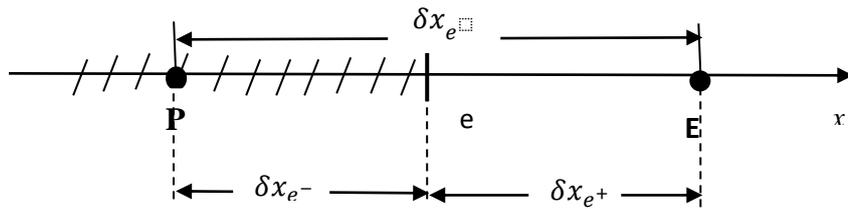
La loi d'interpolation est introduite au niveau de $A(|P_e|)$, nous avons effectué le calcul pour une interpolation linéaire par souci de simplification, alors que cette variation peut prendre n'importe quelle forme. Pour illustrer cela on se propose de faire un calcul exact de ce flux généralisé.

2.4 - Calcul exacte du flux généralisé (solution exacte)

Les flux généralisés $J_{(x_e, x_w, x_r, x_s)}$ par conséquent les valeurs de ϕ et de sa dérivée première sont calculés en des points (faces des volumes finis) qui ne sont pas des nœuds du maillage de ϕ_P . Il faut donc exprimer les valeurs de ϕ au droit des faces en fonctions des valeurs de ϕ aux centres des volumes de contrôle. Pour ce faire, on considère le cas simple suivant :

On se propose de résoudre un problème monodimensionnel de convection diffusion en régime permanent, à coefficient de diffusion constant et sans terme source. L'équation (3) s'écrit dans ce cas :

$$\frac{d}{dx}(J_x) = 0 \quad (26)$$



L'intégration de l'équation (26) entre les points P et E donne :

$$J_e - J_w = 0 \quad (27)$$

Avec $J_i = U_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ suivant la direction i (28)

L'équation (26) s'écrit encore :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\Gamma}{U} \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (29)$$

La résolution analytique de l'équation (29) entre les points P et E figure ci-dessus (par intégration deux fois entre le point P et E), permet de donner la solution exacte de $\phi(x)$ entre les points P et E.

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$x=0 \quad \phi = \phi_0 \quad (30a)$$

$$x=L \quad \phi = \phi_L \quad (30b)$$

La solution est donnée par :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp\left(\frac{Pe x}{L}\right) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (31)$$

En tenant compte de la solution (31) qu'on substitue dans de l'équation(28), on obtient pour i=e, le flux généralisé J entre les points P et E celui-ci s'écrit :

$$J_e = F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(Pe) - 1} \right) \quad (32)$$

$$\text{Où } Pe = \frac{U \delta_x}{\Gamma} ; \quad F_e = U_e ; \quad D_e = \frac{\Gamma}{\delta_x} \quad (33)$$

$$Pe = \frac{U \delta_x}{\Gamma}$$

Ce qui donne $Pe = \frac{F_e}{D_e}$ quantité adimensionnelle appelée nombre de Peclet (traduisant l'importance de la convection par rapport à la diffusion) de maille.

Les distances δx_{e-} et δx_{e+} sont indiquées sur la figure 2, le coefficient de diffusion Γ est considéré uniforme sur chaque volume de contrôle.

$$\text{On définit } D_e = \left[\frac{(\delta x)_{e-}}{\Gamma_P} + \frac{(\delta x)_{e+}}{\Gamma_E} \right]^{-1} \quad (34)$$

La raison de définir D_e de la sorte est plutôt physique que numérique.

Finalement par substitution de la relation (32) et une expression similaire pour J_w dans l'équation (27) on obtient :

$$F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(Pe) - 1} \right) - F_w \left(\phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\exp(Pw) - 1} \right) = 0 \quad (35)$$

Qui peut être écrite sous forme standard :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (36)$$

Avec

$$a_E = \frac{F_e}{\exp(Pe) - 1}$$

$$a_W = \frac{F_w \exp(Pw)}{\exp(Pe_w) - 1}$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (37)$$

De façon identique, on peut déterminer les différents flux totaux entre le nœud central P et les autres nœuds voisins.

2.5- Linéarisation du terme source

Ce terme peut être constant ce qui ne pose aucun problème particulier. Mais souvent il dépend explicitement de la variable ϕ_P . Cela peut causer des problèmes au niveau du traitement numérique (instabilités, divergence de la méthode numérique). Pour éviter ce genre de problème il faut linéariser ce terme en le décomposant en deux parties :

$$\overline{S\phi} = S_C^\phi + S_P^\phi \phi_P \quad (38)$$

Où S_C^ϕ : partie constante du terme source

S_P^ϕ : Coefficient de ϕ_P

L'opération de linéarisation du terme source est souvent cruciale, car la solution de beaucoup de problèmes complexes dépend de cette décomposition. Il faut veiller à ce que le coefficient S_P^ϕ soit négatif, un coefficient positif peut faire diverger le code de calcul.

La décomposition du terme source peut être quelconque il suffit que le coefficient S_P^ϕ soit négatif, une façon de le linéariser est de prendre S_P^ϕ comme étant la dérivée du terme source au point ϕ^* (ϕ^* : valeur de ϕ calculée dans l'itération précédente).

2.6- Discrétisation de l'équation à deux dimensions

A deux dimension l'équation générale de conservation en introduisant la notion de flux généralisé suivant la direction i la quantité J_i définie par :

$$J_i = U_i \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

L'équation différentielle (1) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi) + \frac{\partial}{\partial x} (J_x) + \frac{\partial}{\partial y} (J_y) = (S^\phi) \quad (39)$$

Où J_x et J_y sont les flux généralisé (convection +diffusion) tel que :

$$J_x = u \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$J_y = v \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

u et v sont les composantes de vitesse suivant x et y.

L'intégration de l'équation (39) sur l'élément de volume schématisé figure 3, on obtient :

$$\frac{(\phi_P - \phi_P^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + J_e - J_w + J_n - J_s = (S_C^\phi + S_P^\phi \phi_P) \Delta x \Delta y \quad (40)$$

On peut utiliser la solution exacte ce qui donne :

$$\frac{(\phi_P - \phi_P^0)}{\Delta t} \Delta V + \left[F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\exp(Pe_e) - 1} \right) \right] - \left[F_w \left(\phi_w + \frac{\phi_w - \phi_P}{\exp(Pe_w) - 1} \right) \right]$$

$$+ \left[F_n \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_N}{\exp(Pe_n) - 1} \right) \right] - \left[F_s \left(\phi_s + \frac{\phi_s - \phi_P}{\exp(Pe_s) - 1} \right) \right] = (S_C^\phi + S_P^\phi \phi_P) \Delta V$$

ϕ_P et ϕ_P^0 sont les valeurs de au point P à l'instant donnée et l'instant précédent.

De la même manière on intègre l'équation de continuité sur l'élément de volume, on obtient :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (41)$$

$F_e, F_w, F_n,$ et F_s sont les flux massiques traversant les interface de volume de contrôle.

Avec

$$F_e = u_e \Delta y \quad F_w = u_w \Delta y$$

$$F_n = v_n \Delta x \quad F_s = v_s \Delta x$$

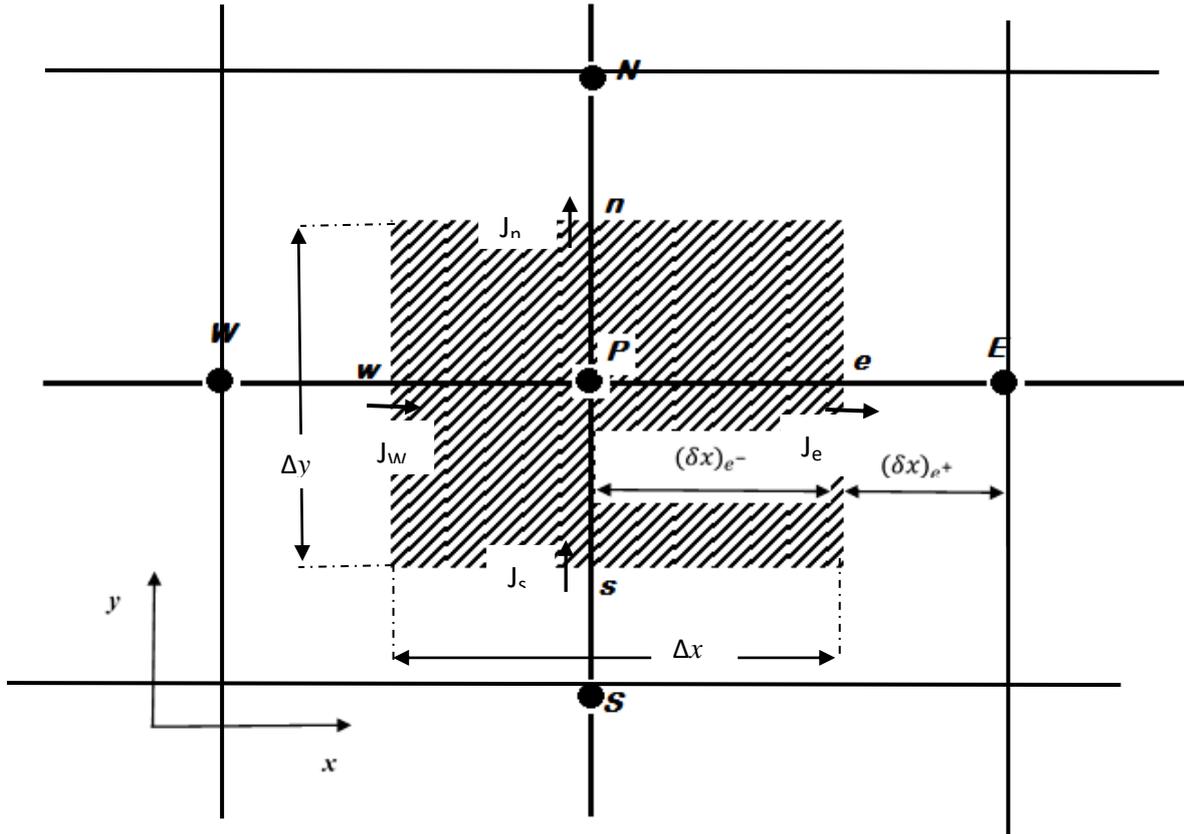


Figure 3 : volume de contrôle à deux dimensions

En multipliant équation (41) par ϕ_P et on la soustrayant de (40), on obtient :

$$\frac{(\phi_P - \phi_P^0)}{\Delta t} \Delta x \Delta y + (J_e - F_e \phi_P) - (J_w - F_w \phi_P) + (J_n - F_n \phi_P) - (J_s - F_s \phi_P) = (S_C^\phi + S_P^\phi \phi_P) \Delta x \Delta y \quad (42)$$

De la même manière que (22) on écrit :

$$(J_{x_e} - U_e \phi_P) A_e = a_E (\phi_P - \phi_E)$$

Ainsi que les autres termes $(J_w - F_w \phi_P)$, $(J_n - F_n \phi_P)$ et $(J_s - F_s \phi_P)$ où

$$\begin{aligned} a_E &= D_e A(|Pe_e|) + \text{Max}[-F_e, 0] \\ a_W &= D_w A(|Pe_w|) + \text{Max}[F_w, 0] \\ a_N &= D_n A(|Pe_n|) + \text{Max}[-F_n, 0] \end{aligned} \quad (43)$$

$$a_S = D_S A(|Pe_s|) + \text{Max}[F_s, 0]$$

L'expression $\text{Max}[a,b]$ désigne le maximum de a et b . La fonction d'interpolation entre le point P et les nœuds voisins, calculée à partir de la solution exacte d'un cas monodimensionnel, présente un point singulier quand le terme de convection devient nul et nécessite beaucoup de temps dans le calcul numérique.

Et l'équation finale discrétisée est donnée par :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (44)$$

Les lois d'interpolation

C'est au niveau de $A(|Pe_e|)$ que s'introduit la loi d'interpolation. Nous avons effectué les calculs pour une variation linéaire au § 2.2 par souci de simplification, et nous avons présenté au § 2.4 la solution exacte, donc cette variation peut prendre n'importe quelle forme. Dans la littérature, on trouve plusieurs, à savoir tableau ci-dessous :

Schéma	$A(Pe)$
Différence centrale	$1-0.5 Pe $
Upwind (en amont)	1
Hybride	$\text{Max}(0, 1-0.5 Pe)$
Puissance	$\text{Max}(0, (1 - 0.1 Pe)^5)$
Exponentielle	$\frac{ Pe }{\exp(Pe) - 1}$

Le choix d'une loi fait intervenir plusieurs facteurs dont les plus importants sont la précision et le temps de calcul.

L'équation (41) peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b_P \quad (45)$$

La notation nb indique les nœuds voisins au nœud P, et la sommation est étendue à tous les nœuds voisins au nœud P.

Chapitre 2

1- DISCRETISATION DES EQUATIONS _____	17
1.1- Choix du maillage _____	17
1.2- Discrétisation des équations de conservation sur un volume fini _____	19
2- TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES _____	20
2.1- Conditions aux limites à la paroi _____	20
2.1.1-Vitesse : _____	20
2.1.2-Température _____	21
2.2- Sortie _____	22
2.3- Entrée _____	22
3- METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION _____	23
4-COUPLAGÉ PRESSION-VITESSE, ALGORITHME DE RESOLUTION _____	24
4.1. COUPLAGÉ PRESSION-VITESSE _____	24
4.2. ALGORITHME SIMPLER _____	24
4.2.1 Algorithme SIMPLE _____	24
4.2.2. Algorithme SIMPLER _____	26
4.3. CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA CORRECTION DE PRESSION ET POUR LA PRESSION _____	27
4.4 SOUS-RELAXATION –CONVERGENCE _____	29
4.5 TEST DE CONVERGENCE _____	30
4.6 CONCLUSIONS _____	30

Chapitre 2**DISCRETISATION DES EQUATIONS DE CONSERVATION****TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES****METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION DES EQUATIONS ALGEBRIQUES****COUPLAGE PRESSION-VITESSE, ALGORITHME DE RESOLUTION**

Les équations de bases sont discrétisées spatialement en utilisant l'approche des volumes de contrôle (ou volume finis). Cette technique, à base physique, s'appuie sur le principe de conservation ; elle consiste à faire des bilans, dans chaque volume fini, des différentes quantités physiques telles que : la masse, la quantité de mouvement, l'énergie ..., etc. Mathématiquement, cette technique se traduit par l'intégration des équations, écrites sous forme conservative, sur chaque volume.

1- DISCRETISATION DES EQUATIONS**1.1- Choix du maillage**

De nombreux schémas aux volumes finis ont été utilisés auparavant, la principale différence entre ceux-ci est les stockages des variables dépendantes (composantes de la vitesse, pression, température) ainsi que les différents volumes pour le calcul de ces variables.

Le choix du maillage, doit être basé sur des considérations physiques, à savoir : les propriétés de conservation des variables physiques doivent être maintenues quand on passe d'un volume de contrôle au volume voisin, la discontinuité des propriétés physiques doit être respectée, et l'implémentation des conditions aux limites doit être aisée. Dans notre cas, deux problèmes doivent être considérés :

- la présence de la pression sous forme de gradient $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ dans le terme source.
- découplage entre les nœuds pairs et impairs dans la discrétisation de l'équation de continuité.

1°/ la présence de la pression sous forme de gradient $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ dans le terme source des équations de conservation de la quantité de mouvement: L'intégration du gradient de pression sur le volume de contrôle suivant la direction x , donne :

$$\int_V \left(-\frac{\partial P}{\partial x} \right) dV = \frac{p_w - p_e}{\Delta x} \Delta V \quad (1)$$

$p_w - p_e$: est la différence de pression exercée sur le volume de contrôle.

Or p_w et p_e sont inconnues et doivent être calculées à partir des valeurs nodales par interpolation.

$$p_w - p_e = \frac{p_P - p_W}{2} - \frac{p_E - p_P}{2} = p_W - p_E \quad (2)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement contient donc la différence de pression entre deux points alternés et non pas entre deux points adjacents. Un champ de pression uniforme ne peut donc être différencié d'un champ de pression en « zig-zag » oscillant entre un *niveau constant* pour

tous les nœuds pairs et un autre niveau pour tous les nœuds impairs. Cela permettrait au programme de calcul de converger vers une solution numériquement exacte mais qui ne présente aucune réalité physique.

2°/ La discrétisation de l'équation de continuité dans le cas monodimensionnel suivant la direction x permet d'écrire :

$$U_e - U_w = 0 \quad (3)$$

U_e et U_w sont des valeurs inter-nodales et doivent être déterminées à partir des vitesses nodales par interpolation (linéaire pour simplifier). On aboutit à :

$$\frac{(U_E + U_P)}{2} - \frac{(U_P + U_W)}{2} = \frac{(U_E - U_W)}{2} = 0 \quad (4)$$

Une fois de plus, il y a découplage entre les nœuds pairs et impairs, ce qui peut provoquer des oscillations non physique du champ de vitesse. Cela remet en cause la propriété de conservation de la masse en passant d'un volume de contrôle au volume voisin, et en conséquence celle des autres variables.

Les deux problèmes évoqués ci-dessus, liés directement à la discrétisation, ont conduit Harlow et Welch (1965) à repenser autrement le problème de la localisation des variables et utiliser des maillages décalés pour les vitesses. On considère donc une grille pour la pression (et toutes les variables scalaires), et on met les nœuds pour les composantes de la vitesse sur les faces des volumes de contrôle figure 1. Cela permet d'éviter les deux problèmes cités ci-dessus provoquant l'oscillation des champs de pression et de vitesse.

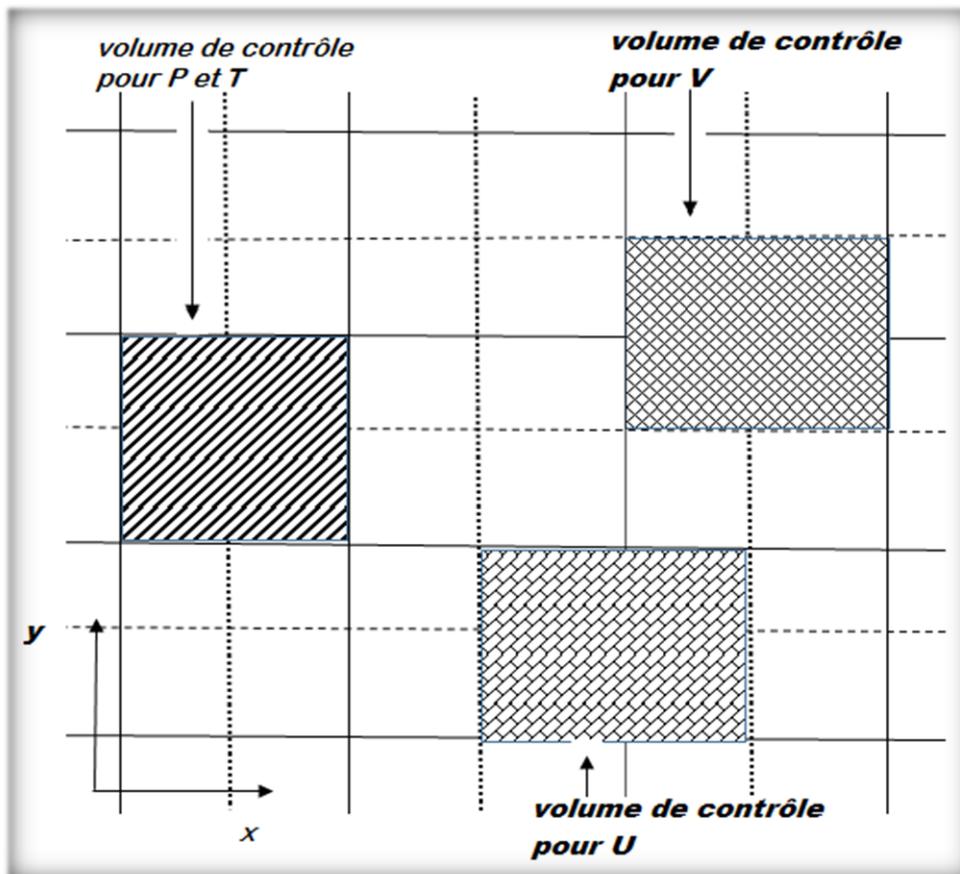


Figure 1 : Localisation des différentes variables sur les volumes de contrôle

1.2- Discrétisation des équations de conservation sur un volume fini

L'intégration des équations de conservation sur un volume fini (volume de contrôle) dans un système physique bidimensionnel s'obtient facilement en appliquant la méthode de discrétisation de l'équation générale présentée dans le chapitre 1. La pression P , la température T , sont définies au centre du volume de contrôle centré au point $P(x_i, y_j)$ figure 2. Les composantes de la vitesse (U, V) sont définies respectivement sur les faces Est et Ouest localisées à $(i \pm 1/2, j)$ et Nord et Sud localisées à $(i, j \pm 1/2)$. La figure 1 illustre les différents éléments dans le cas d'un maillage cartésien bidimensionnel.

Les coefficients ainsi que le terme source sont spécifiques à chaque variable. Nous développons dans ce qui suit la discrétisation et l'introduction des conditions aux limites et aux interfaces relatives à chaque variable.

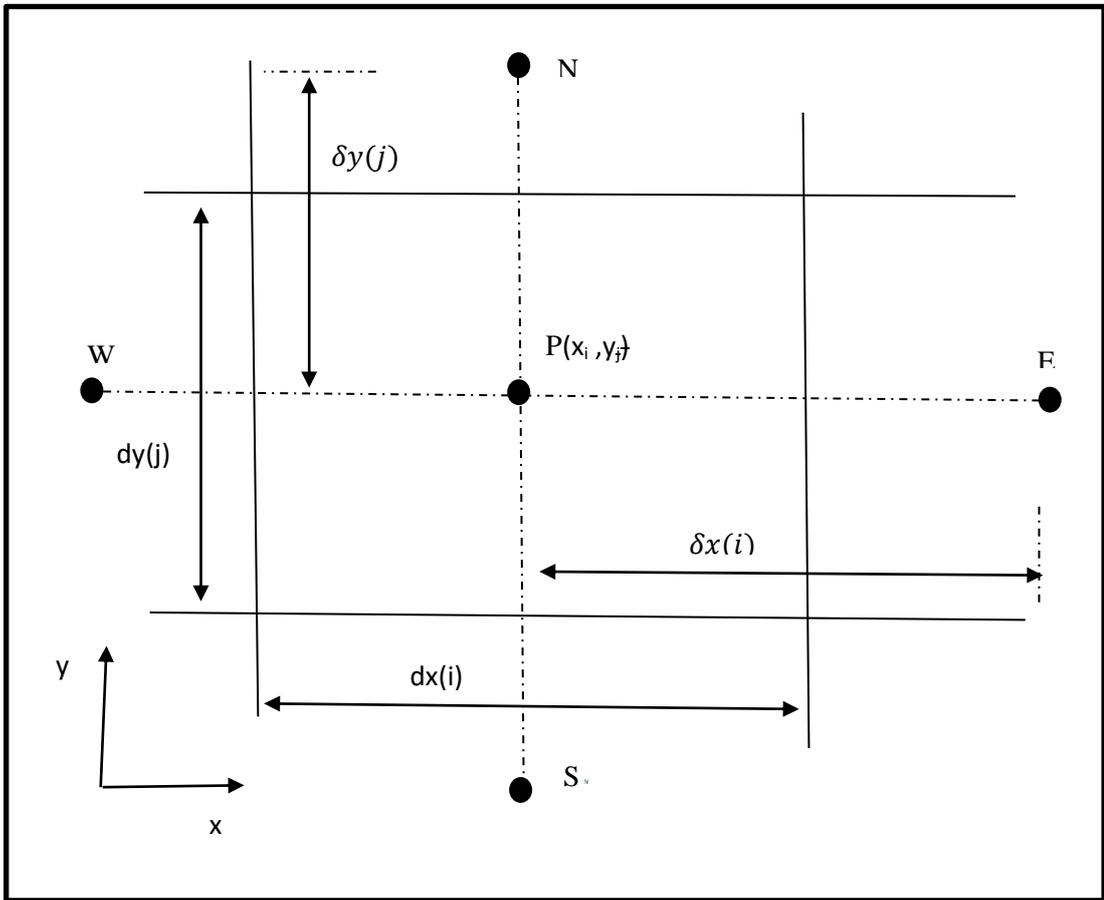


Figure 2: Position et dimensions du volume de contrôle

On a

$$\begin{aligned}
 dx_1 = dx(i) = x_{i+1} - x_i \quad , \quad dx_2 = dx(i-1) = x_i - x_{i-1} \\
 \delta x(i) = \frac{1}{2} (dx_1 + dx_2) \\
 dy_1 = dy(j) = y_{j+1} - y_j \quad , \quad dy_2 = dy(j-1) = y_j - y_{j-1} \\
 \delta y(j) = \frac{1}{2} (dy_1 + dy_2)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Il y a deux possibilités de mailler un domaine physique figure (1 chap. 1).

- 1- Volume complet à la frontière
- 2- Demi-volume à la frontière

Le choix de l'une ou de l'autre façon de mailler un domaine ne peut être déterminé *que par* le bon conditionnement des conditions aux limites. En effet les conditions aux limites sont souvent génératrices d'erreurs dans le calcul numérique et peuvent causer des d'instabilités. De plus la distribution du champ de vitesse a une influence considérable sur les autres variables qui en dépendent, à savoir la température et le transfert de chaleur. Un maillage à volume complet à la frontière pour les variables scalaires (P, T, ...) s'adapte bien à beaucoup de problèmes et intègre bien les conditions aux limites dans le code numérique, là où elles sont définies.

2- TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES

La qualité de toute simulation numérique est fortement liée à la façon avec laquelle ces conditions aux frontières sont calculées ou imposées.

L'équation de conservation discrétisée (6 chap. 1) fait intervenir la valeur du flux généralisé sur la face du volume de contrôle confondue avec la paroi. Ayant choisi le maillage à volume complet à la frontière pour les variables scalaires telles que P, et T comment peut-on implémenter les conditions aux limites pour chaque variable dans l'équation discrétisée correspondante ? On va essayer de répondre à cette question dans ce qui suit.

2.1- Conditions aux limites à la paroi

Comme nous l'avons introduit dans le chapitre 1,

*Conditions aux limites hydrodynamiques :

- Section d'entrée généralement u,v fixées
- Surface solide $u=v=0$,
- Section de sortie condition d'écoulement établi $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$

*Conditions aux limites thermiques

- Section d'entrée généralement T fixée
- Section de sortie condition d'écoulement établi $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$
- Les parois solides T ou $\frac{\partial T}{\partial n}$ sont fixées

Près d'une paroi solide la sous-couche visqueuse est très mince et caractérisée par un gradient de vitesse tangentielle considérable. En général elle ne peut être décrite dans le maillage utilisé. Un maillage fin est nécessaire pour pouvoir tenir compte des effets de cette sous-couche visqueuse. Cela peut devenir coûteux en temps de calcul et en mémoire.

2.1.1-Vitesse :

α - cas d'une valeur imposée à la frontière

La discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant la direction x, sur un volume de contrôle dont la *face Nord est une paroi*, s'écrit :

$$(J_e - U_e \phi_p) A_e - (J_w - U_w \phi_p) A_w + (J_f - U_f \phi_p) A_f - (J_s - U_s \phi_p) A_s = S^U \Delta V \quad (6)$$

Où on a remplacé le terme $(J_{y_n} - U_n \phi_p)$ par $(J_{y_f} - U_f \phi_p)$ sur la frontière Nord c'est le seule terme à calculer, le calcul des autres termes, reste inchangé, comme pour un volume central.

$$\begin{aligned} J_f - U_f \phi_p &= (U_f \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y})_f - U_f \phi_p \\ &= U_f \phi_f - \Gamma_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_f - U_f \phi_p \end{aligned} \quad (7)$$

Par différence finie :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_f = \frac{\phi_f - \phi_p}{\delta y_f}$$

Donc :

$$\begin{aligned} J_f - U_f \phi_p &= U_f \phi_f - \Gamma_f \frac{\phi_f - \phi_p}{\delta y_f} - U_f \phi_p \\ J_f - U_f \phi_p &= \left(\frac{\Gamma_f}{\delta y_f} - U_f \right) (\phi_p - \phi_f) \end{aligned}$$

En multipliant par A_f et en utilisant les conductances de diffusion D et de convection F, on a :

$$\begin{aligned} (J_f - U_f \phi_p) A_f &= \left(\frac{\Gamma_f}{\delta y_f} - U_f \right) (\phi_p - \phi_f) A_f = (D_f - F_f) (\phi_p - \phi_f) \\ (J_f - U_f \phi_p) A_f &= a_f (\phi_p - \phi_f) \end{aligned}$$

Comme pour la conductance globale intérieure, on met la conductance globale à la frontière sous la forme :

$$a_f = D_f + \text{Max}[-F_f, 0] \quad (8)$$

Ce qui revient à prendre :

$$A(|Pe_e|) = 1$$

Cette conclusion est tout à fait logique puisque la valeur de ϕ sur la frontière qui coïncide avec la paroi est donnée et on n'a pas besoin d'interpoler pour l'obtenir.

b- cas d'un gradient imposé à la frontière $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$

La discrétisation de l'équation $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ permet d'écrire :

$$\phi_f - \phi_p = 0 \text{ ou } \phi_f = \phi_p \quad (9)$$

On effectue alors le calcul normalement et on adapte à chaque fois les valeurs ϕ_f à la frontière en fonction des valeurs ϕ_p calculées. Ceci revient à imposer une conductance nulle à la frontière $a_f = 0$.

2.1.2-Température

a- Cas du gradient imposé à la frontière $\frac{\partial \phi}{\partial n} = cte$

L'équation à la frontière reste la même, il suffit de recalculer le terme

$$J_f - U_f \phi_p = U_f (\phi_f - \phi_p) - \Gamma_f \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_f \quad (10)$$

L'expression $-\Gamma_f \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_f$ exprime le flux de chaleur à la paroi.

On constate qu'en plus du flux imposé à la frontière, on a besoin de la valeur de ϕ sur cette même frontière. La manière la plus générale pour résoudre le problème est de développer une équation pour chaque ϕ à la frontière, tenant compte du flux imposé, que l'on résout avec le système global pour obtenir ϕ_f .

b- Flux imposé constant

Ce cas présente seulement pour l'équation d'énergie et dans le cas où la frontière est une paroi solide. On a alors la vitesse à la frontière est nulle et l'équation à la frontière se réduit à :

$$J_f - U_f \phi_p = J_f = \text{cte} \quad (11)$$

Qui s'introduit dans le terme source de l'équation discrétisée.

Pour tous autres cas, avec un peu de réflexion on établira l'expression aux limites.

c- Paroi adiabatique

Si la paroi est adiabatique, il suffit d'assurer un coefficient nul à la frontière. Si par exemple c'est la face Est du volume de contrôle qui est confondue avec la paroi on pose alors :

$$a_E = 0. \quad (12)$$

2.2- Sortie

Le fait d'imposer un gradient nul à la sortie, se traduit numériquement par un coefficient nul sur la face aval du volume de contrôle à la sortie.

$$a_f = 0 \quad (13)$$

Cela peut être justifié par le fait que, généralement à la sortie le phénomène de convection devient prépondérant par rapport à la diffusion, par conséquent le nombre de Peclet devient important. Cela donne un coefficient nul à l'Est si cette face est confondue avec la frontière à la sortie.

2.3- Entrée

Les valeurs des différentes variables sont imposées, leur introduction dans les calculs ne pose aucun problème.

3- METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION

L'équation discrétisée (44 chap.1) exprime la valeur de ϕ au point P en fonction des valeurs de ϕ aux nœuds voisins. Elle s'écrit autant de fois qu'il y a de nœuds où la variable ϕ est considéré comme inconnue. Les coefficients a_E, a_W, \dots etc, dépendent généralement de la variable ϕ .

En effet sur l'ensemble du domaine physique nous obtenons un système d'équations algébriques non-linéaires de la variable ϕ . La solution de ce système d'équations non-linéaires, peut être obtenue par l'intermédiaire de solution d'équations algébriques linéaires, en utilisant une méthode de résolution itérative. Cela consiste à calculer les coefficients en fonction des précédentes estimations des valeurs de ϕ , l'équation discrétisée (44 chap.1) est ainsi traitée comme une équation linéaire, permet de calculer une nouvelle estimation de la variable recherchée ϕ . Les coefficients pour l'itération suivante sont calculés en fonction des nouvelles estimations.

En pratique une méthode de résolution doit être peu coûteuse à la fois en place mémoire, et en temps de calcul (avoir une convergence rapide). Cela n'est possible que par la combinaison de plusieurs techniques complémentaires qui sont par exemple :

- Méthode de balayage rangée par rangée
- Algorithme de Thomas (méthode de résolution directe)
- Procédure de correction par bloc

La combinaison de ces trois techniques constitue *l'algorithme de résolution*.

Le principe de base est le suivant :

L'idée de base de la méthode de balayage rangée par rangée, valable dans le cas d'un domaine de dimension supérieure ou égale à deux, est transformer l'équation (44 chap.1), en une pseudo-équation monodimensionnelle par la substitution des valeurs de ϕ dans les autres directions par des approximations. L'équation obtenue pour une ligne est alors résolue par l'Algorithme de Thomas. On parcourt le système ligne par ligne jusqu'à ce que toutes les lignes soient traitées de cette manière dans une direction. On parcourt ensuite de la même façon l'autre direction. Pour illustrer cela, considérons un système bidimensionnel, l'équation (44 chap.1) s'écrit dans ce cas :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_P \quad (14)$$

Si la méthode de balayage rangée par rangée est appliquée suivant la direction x , on doit introduire des approximations des valeurs de ϕ aux nœuds voisins suivant la direction y , soit ϕ_N^* et ϕ_S^* le résultat est :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W = (a_N \phi_N^* + a_S \phi_S^* + b_P) \quad (15)$$

Le signe (*) indique que la valeur est approximative, et le terme entre parenthèse dans l'équation (15) est considéré comme connu. En regroupant les termes inconnus dans le même membre, cette équation peut s'écrire :

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad (16)$$

Equation dans laquelle i indique la position du nœud suivant la direction x , et les coefficients a_i, b_i, c_i et d_i sont donné par :

$$\begin{aligned} a_i &= a_P \\ b_i &= a_E \\ c_i &= a_W \\ d_i &= a_N \phi_N^* + a_S \phi_S^* + b \end{aligned} \quad (17)$$

On obtient donc pour chaque ligne un système d'équations de structure tridiagonale qui peut être résolu par l'Algorithme de thomas.

La méthode de résolution rangée par rangée consiste donc à écrire une équation semblable à l'équation (15) pour chaque nœud du maillage (volume fini) suivant la direction x , on obtient un système d'équations auquel on applique une méthode de résolution directe (par exemple l'Algorithme de Thomas), après on explore la ligne suivante. Le domaine est parcouru de la même façon suivant les autres directions suivant que le domaine est bi ou tridimensionnel. Le processus est répété jusqu'à la convergence de la solution. On trouve *dans l'annexe A bref rappel de l'algorithme de Thomas et de la procédure de correction bloc par bloc.*

4-COUPLAGÉ PRESSION-VITESSE, ALGORITHME DE RESOLUTION

Dans cette partie on se propose de décrire succinctement la procédure que nous avons adoptée pour la résolution du système des équations de conservation. Après avoir décrit dans un chapitre précédent l'algorithme de résolution d'une équation de conservation, nous présenterons l'algorithme que nous avons choisi d'utiliser pour tenir compte du couplage les différentes variables.

4.1. COUPLAGE PRESSION-VITESSE

Par couplage pression-vitesse, on entend la liaison qui existe entre le champ de pression et le champ de vitesse. En effet l'équation de conservation de la quantité de mouvement, contient le gradient de pression.

Cependant cette équation ne peut être résolue que si le terme de pression est spécifié, c'est-à-dire on fixe un champ de pression. Alors pour différents champs de pression, qu'on aura fixée, on aura différents champs de vitesse. Si le champ de pression est exact, le champ de vitesse résultant de la résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement doit satisfaire également l'équation de continuité. La contrainte qui permet la détermination du champ de pression est donc l'équation de continuité.

La manière dont il faut résoudre le couplage vitesse-pression a fait l'objet de nombreuses études. Il en a résulté un certain nombre d'algorithmes (SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC, PISO ...), qui ne diffèrent que par la technique utilisée pour le traitement de ce couplage.

4.2. ALGORITHME SIMPLER

L'algorithme SIMPLER, est une amélioration de l'algorithme SIMPLE proposé par PATANKAR. Nous commençons donc par expliciter ce dernier. Nous introduisons les différentes améliorations apportées par les différents auteurs pour construire l'algorithme SIMPLER.

4.2.1 Algorithme SIMPLE

Les équations algébriques de conservation de la quantité de mouvement permettent de déterminer le champ de vitesse. Ces équations sont fonctions du gradient de la pression et d'un terme source qui dépend de la vitesse.

$$a_p^U U_p = \sum a_{nb}^U U_{nb} + b^U + A_e(P_p - P_E) \quad (18)$$

$$a_p^V V_p = \sum a_{nb}^V V_{nb} + b^V + A_n(P_p - P_N) \quad (19)$$

Où les termes b^U et b^V désignent respectivement le terme source correspondant à chaque composante de la vitesse, excepté le gradient de pression.

Il est possible de résoudre ces équations en se donnant un champ de pression P^* . Il en résulte un champ de vitesse approximatif U^* , donné par :

$$a_p^U U_p^* = \sum a_{nb}^U U_{nb}^* + b^U + A_e (P_p^* - P_p^*) \quad (20)$$

$$a_p^V V_p^* = \sum a_{nb}^V V_{nb}^* + b^V + A_n (P_p^* - P_n^*) \quad (21)$$

Le champ de pression étant approximatif, les solutions obtenues après une itération ne satisfont pas à l'équation de conservation de la masse. Il faut corriger les vitesses et les pressions pour que les trois champs satisfassent simultanément les trois équations de conservations.

$$\begin{aligned} \text{On écrit alors :} \quad P &= P^* + P' \\ U &= U^* + U' \\ V &= V^* + V' \end{aligned} \quad (22)$$

En substituant les quantités définies ci-dessus dans l'équation (18,19) et en soustrayant l'équation (20,21) des résultats, on obtient :

$$a_p^U U_p' = \sum a_{nb}^U U_{nb}' + A_e (P_p' - P_p') \quad (23)$$

$$a_p^V V_p' = \sum a_{nb}^V V_{nb}' + A_n (P_p' - P_n') \quad (24)$$

La caractéristique principale de l'algorithme SIMPLE est de considérer comme négligeables les termes $\sum a_{nb}^U U_{nb}'$ et $\sum a_{nb}^V V_{nb}'$ qui constituent la contribution des corrections de vitesse des nœuds voisins.

Cet approximation est justifiée par le fait que, quand la solution aura convergé vers la solution finale les corrections U' et V' deviennent nulles et par conséquent les contributions des nœuds voisins sont nulles. Ce qui permet d'écrire les corrections de vitesse comme suit :

$$U_p' = \frac{A_e}{a_p^U} (P_p' - P_E') \quad (25)$$

$$V_p' = \frac{A_n}{a_p^V} (P_p' - P_N') \quad (26)$$

$$\text{On pose} \quad d_e = \frac{A_e}{a_p^U} \quad \text{et} \quad d_n = \frac{A_n}{a_p^V}$$

On obtient donc les vitesses corrigés par :

$$U_p = U^* + d_e (P_p' - P_E') \quad (27)$$

$$V_p = V^* + d_n (P_p' - P_N') \quad (28)$$

Equation de correction de pression

En introduisant ces expressions dans l'équation de continuité écrite pour le volume associé au nœud P , on obtient l'équation suivante pour les corrections de pression.

$$a_p^{P'} P_p' = a_E^{P'} P_E' + a_W^{P'} P_W' + a_N^{P'} P_N' + a_S^{P'} P_S' + b_p^{P'} \quad (29)$$

$$\text{Avec} \quad a_E^{P'} = A_e d_e \quad (30)$$

$$a_W^{P'} = A_w d_w \quad (31)$$

$$a_N^{P'} = A_n d_n \quad (32)$$

$$a_S^{P'} = A_s d_s \quad (33)$$

$$a_p^{P'} = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (34)$$

$$b_p^{P'} = U_w^* A_w - U_e^* A_e + V_s^* A_s - V_n^* A_n \quad (35)$$

Nous avons ainsi obtenu l'équation de correction de la pression. Elle présente la même forme que l'équation générale discrétisée. Elle peut donc facilement être intégrée dans le code de calcul numérique. Sa résolution permet de calculer le champ de correction de pression P' , ainsi que ceux des corrections des vitesses par application des relations (25,26).

Remarquons que b_p n'est rien d'autre que le bilan de masse correspondant au champ de vitesse approximatif. Lorsque le terme source b_p devient nul il n'y aura plus de génération du champ de correction de pression, U^* et V^* seront les solutions exactes U et V .

Le champ de correction de pression obtenu à l'aide de l'équation (29), est généralement grossier : il a le rôle de corriger les vitesses, mais entraîne aussi des corrections exagérées pour le champ de pression. Cela peut faire diverger la procédure de résolution. Il est donc nécessaire d'apporter certaines modifications à savoir :

- Introduction d'un facteur de sous-relaxation pour la pression

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad (36)$$

- Introduction d'un facteur de sous-relaxation pour les vitesses

Cette sous relaxation pour les vitesses se fait à la fin de la résolution de toutes les équations du système, à l'aide de la valeur de l'itération en cours de la variable à relaxer et de sa valeur lors de l'itération précédente :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi^* + \alpha(\phi - \phi^*) \\ &= \alpha\phi + (1 - \alpha)\phi^* \end{aligned} \quad (39)$$

* : indique la valeur de ϕ à l'itération précédente.

Les facteurs de sous-relaxation ont une grande influence sur la convergence et sont parfois difficiles à ajuster. Ils varient d'un problème à un autre. Pour remédier à ce problème une première amélioration introduite par Patankar, consiste à trouver une équation pour la pression. Celle-ci sera calculée directement ce qui permet d'éliminer le coefficient de sous relaxation α_p . C'est cette amélioration qui est à l'origine de l'algorithme SIMPLER.

4.2.2. Algorithme SIMPLER

Considérons l'équation de conservation de la quantité de mouvement que nous pouvons écrire sous la forme suivante :

$$U_P = \frac{\sum a_{nb}^U U_{nb} + b_p^U}{a_p^U} + \frac{A_e(P_p - P_E)}{a_p^U} \quad (40)$$

$$V_P = \frac{\sum a_{nb}^V V_{nb} + b_p^V}{a_p^V} + \frac{A_n(P_p - P_N)}{a_p^V} \quad (41)$$

On définit les composantes de vitesse \hat{U} et \hat{V} , appelées pseudo-vitesses, comme étant les vitesses que l'on aurait aux faces du volume fini, en l'absence de gradient de pression.

Elles sont calculées juste en fonction des vitesses aux nœuds voisins.

$$\hat{U}_P = \frac{\sum a_{nb}^U U_{nb} + b_p^U}{a_p^U} \quad (42)$$

$$\hat{V}_P = \frac{\sum a_{nb}^V V_{nb} + b_p^V}{a_p^V} \quad (43)$$

Equation de la pression

En substituant les vitesses données par les relations (40,41) dans l'équation de continuité discrétisée, on obtient une équation analogue à celle obtenue pour la correction de pression P' (29), mais cette fois-ci en P.

$$a_P^P P_P = a_E^P P_E + a_W^P P_W + a_N^P P_N + a_S^P P_S + b_P^P \quad (44)$$

Avec les coefficients a_P, a_E, a_W, a_N et a_S donnés par les relations (30-34). Quant au terme source b_P^P il est défini par :

$$b_P^P = \hat{U}_W A_W - \hat{U}_E A_E + \hat{V}_S A_S - \hat{V}_N A_N \quad (45)$$

La seule différence entre l'équation de correction de pression et l'équation de pression est le terme source b , calculé à partir de vitesses U^* dans un cas et des vitesses \hat{U} dans l'autre.

L'équation obtenue nous permet de calculer le champ de pression exact qui satisfait l'équation de conservation de la masse correspondant aux vitesses estimées. Par conséquent on a plus besoin du facteur de sous-relaxation α_p .

Nous avons ainsi décrit la modification introduire sur l'algorithme 'Simple ». Il en résulte un nouvel algorithme, « SIMPLER », donc voici les étapes de calcul.

Etapes de calcul « Algorithme SIMPLER »

- 1- Estimation des vitesses (valeurs initiale,)
- 2- Calcul des coefficients des équations de quantité de mouvement et calcul des pseudo-vitesses \hat{U} et \hat{V} par les équations (42,43)
- 3- Evaluation du terme source b^P par la relation (45) et résolution de l'équation (44) ce qui donne le champ de pression $P = P^*$
- 4- Résoudre des équations de la quantité de mouvement, on obtient U^* et V^*
- 5- Evaluation du terme source $b^{P'}$ à partir de la relation (35) et résolution de l'équation (29) en P'
- 6- Correction du champ de vitesse (U, V) relations (22), en calculant les corrections par les relations (27,28)
- 7- Résoudre des autres équations, énergie ... si c'est couplé
- 8- Test de convergence :
 - * oui passer à l'étape suivant
 - * Non revenir à l'étape n°2 avec les champs de vitesse (U, V) comme nouvelles estimations
- 9- Résolution des équations relatives aux autres variables non couplées ni avec la pression ni avec les vitesses.

4.3. CONDITIONS AUX LIMITES POUR LA CORRECTION DE PRESSION ET POUR LA PRESSION

Le maillage que nous avons adopté (maillage à volume complet à la frontière), permet d'avoir une face du volume de contrôle pour la pression qui coïncide avec la frontière, (figure 1).

La vitesse sur la paroi est, spécifié d'après les conditions aux limites, c'est-à-dire que U_e est fixe. Par conséquent la correction de vitesse est nulle $U_e' = 0$. D'après la relation (25) on a :

$$U_e' = d_e (P_P' - P_E') \quad (46)$$

On en déduit que :

$$P_P' = P_E' \quad (47)$$

Cela se traduit donc au niveau de la procédure numérique par l'introduction d'un coefficient nul à la frontière Est ($a_E^{P'} = 0$) dans l'équation de correction de pression.

Pour la pression, comme la vitesse est connue sur la frontière, donc on n'a pas besoin de valeur de pression. Mais la condition aux limites reste posée, car la pression intervient sous forme de gradient et on a besoin de sa valeur sur la frontière. Pour détourner cette situation on adopte la même condition que pour la correction de pression c'est-à-dire $a_E^P = 0$.

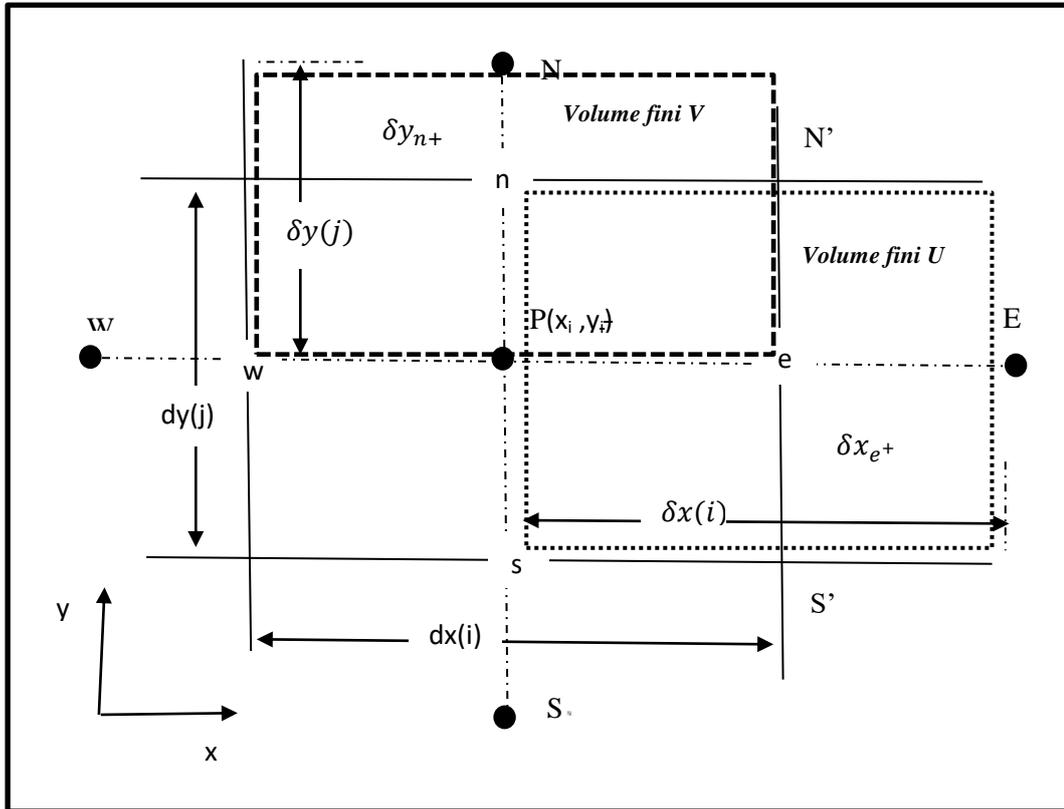


Figure 3 : Volume de contrôle frontière

Cette façon de faire justifie par le fait que près de la paroi, l'écoulement est dominé par les forts gradients de vitesse tangentielle. L'erreur est négligeable en adoptant l'approximation suivante :

$$P_p = P_E \quad (48)$$

La pression n'intervient dans les calculs que sous forme de gradients. La pression n'est définie qu'à une constante près. Il faut donc fixer le niveau de pression en un point au moins de l'écoulement. Cela s'intègre facilement dans le code numérique, en posant :

Soit I le point où la pression est imposée.

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \quad (49)$$

$$a_I = A \quad (50)$$

$$a_I = A \cdot P_0 \quad (51)$$

A : constante quelconque non nulle

P_0 : Niveau de pression imposé

Il est souhaitable, pour de raisons numériques, de prendre une valeur de A proche des coefficients aux nœuds voisins qui entourent le point I.

4.4 SOUS-RELAXATION –CONVERGENCE

La résolution des équations algébriques de conservation est réalisée à l'aide d'une méthode itérative décrite par l'algorithme SIMPLER pour traiter le couplage et la non-linéarité de ces équations. Le processus peut converger vers la solution, comme il peut osciller autour sans jamais l'atteindre ou diverger complètement. L'introduction d'un coefficient de sous-relaxation ($0 < \alpha_\phi < 1$) permet de contrôler la variation de la variable ϕ d'une itération à une autre (non-linéaire), et par suite assurer la convergence du schéma numérique.

Plusieurs techniques sont utilisées dans la littérature, nous présentons celle que nous avons utilisée due à Patankar. Elle consiste à opérer la sous-relaxation pour les vitesses (ou une autre variable) au sein de la boucle non-linéaire au moment du calcul des coefficients. Cela a l'avantage d'accélérer la convergence et de diminuer le temps de calcul.

Soit l'équation de conservation pour la variables ϕ

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (52)$$

La variable ϕ est donnée par la relation suivante

$$\phi_p = \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} \quad (53)$$

Si on ajoute et on retranche au deuxième membre de l'équation ci-dessus, la valeur de ϕ à l'itération précédente, notée ϕ^* , on obtient

$$\phi_p = \phi_p^* + \left(\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (54)$$

Les quantités a_p , a_{nb} et b sont calculée en fonction de ϕ^* .

L'expression entre parenthèse de l'équation (54) représente la variation de ϕ par rapport à l'itération précédente. Cette variation peut être modifiée par l'introduction du facteur de sous-relaxation α_ϕ , ce qui donne :

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha_\phi \left(\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (55)$$

Ce qui s'écrit encore

$$\frac{a_p}{\alpha_\phi} \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b + \frac{1-\alpha_\phi}{\alpha_\phi} a_p \phi_p^* \quad (56)$$

Cette sous-relaxation s'introduit par une modification du coefficient a_p et du terme source b qui deviennent

$$a_p \leftarrow \frac{a_p}{\alpha} = \frac{\sum(a_{nb}) - S_p \Delta V}{\alpha} \quad (57)$$

$$b \leftarrow b \frac{1-\alpha}{\alpha} + \alpha_p \phi_p^* \quad (58)$$

Quand la solution aura convergé, la valeur de ϕ devient égale à la valeur de ϕ^* , et la valeur de ϕ satisfait à l'équation (52).

Le choix du coefficient de sous-relaxation α dépend de la nature du problème et de la variable ϕ . Il peut être variable d'une itération à une autre pour un même problème, comme il peut avoir des valeurs différentes d'une maille à l'autre.

4.5 TEST DE CONVERGENCE

La résolution du système d'équations différentielle se fait d'une manière itérative, il faut donc avoir un critère pour juger de la convergence de la solution, c'est-à-dire un critère pour arrêter les calculs.

Le premier test qui vient à l'esprit est de mesurer la variation des différentes variables entre deux itérations successive es en chaque nœud. C'est-à-dire que l'erreur maximale détectée en un nœud du maillage ne soit pas supérieure à une valeur ER_{max} .

Soit

$$\text{Max}(\phi_i - \phi_i^*) \leq ER_{max} \quad (59)$$

ER_{max} . : Nombre très petit choisi suivant la précision désirée. Tant que la relation (59) n'est pas satisfaite, le calcul se poursuit. Mais cela est insufflant, car une faible vitesse de convergence peut donner l'illusion que la variable considérée converge vers la solution exacte.

Un test plus réaliste physiquement pour contrôler la convergence est de calculer à la fin de chaque itération, les résidus R_ϕ en chaque nœud du maillage et pour chaque variable ϕ . R_ϕ est calculé d'après par la relation :

$$R_\phi = a_p \phi_p - (\sum a_{nb} \phi_{nb} + b) \quad (60)$$

Le test d'arrêt et alors que les R_ϕ associés à chaque variable ϕ tendent vers zéro :

$$\text{Max}|R_\phi| \leq ER_{max} \quad (61)$$

Nous réalisons ces tests de convergence dans notre code numérique comme suit :

- La résolution du système d'équations correspondant à une variable ϕ est considérée comme convergente si la variable ϕ entre deux itérations successives satisfait à la relation (59), en chaque nœud du maillage.
- La solution convergente est obtenue par l'algorithme SIMPLER si l'ensemble des variables satisfont à la relation (61) séparément et en chaque nœud du maillage.

4.6 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre nous avons décrit l'algorithme SIMPLER, pour la résolution du système des équations de conservation. Cet algorithme traite le couplage des variables, permettant ainsi l'écriture d'un système d'équations algébriques indépendantes. La solution de chaque équation peut être obtenue alors par simple application de l'algorithme présenté.

Chapitre 3 : Applications

Résolution d'un problème de convection libre en 2.D.....	32
<i>I- Formulation du problème</i> :.....	32
<i>II- Solution numérique</i>	34
1. Discrétisation des équations gouvernantes par la méthode du volume de contrôle (ou volume finis).....	34
a- Equation de mouvement suivant x	36
b- Equation de mouvement suivant y	36
c- Discrétisation de l'équation de l'énergie.....	37
d- Discrétisation des conditions aux frontières :.....	37
2-Résolution de équations discrétisées.....	37
Algorithme de Résolution (SIMPLER →SIMPLEC).....	37

Chapitre 3

Résolution d'un problème de convection libre en 2.D

I- Formulation du problème :

Il s'agit d'étudier un problème de convection naturelle bidimensionnelle dans une cavité rectangulaire de hauteur H et de longueur L , inclinée d'un angle φ , par rapport à l'horizontale, deux parois sont adiabatiques les autres parois sont symétriquement chauffées et refroidies à l'aide d'un flux de chaleur constant qui les maintient à des températures constantes et différentes.

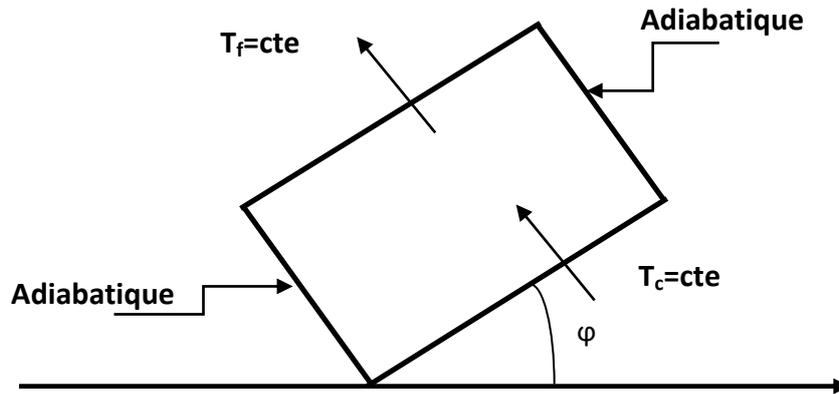


Figure 2 : système étudié

En supposant que les propriétés thermiques du fluide sont constantes à l'exception de la densité dont le terme de poussée qui est supposé obéir à l'approximation de Boussinesq.

Les équations gouvernantes pour un phénomène permanent, en utilisant les variables primitives T , p , u , et v sont définies par :

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (62)$$

- Conservation de la quantité de mouvement dans le cas bidimensionnelle

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\rho}{\rho_0} g \cos \varphi \quad (62)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\rho}{\rho_0} g \sin \varphi \quad (64)$$

- L'équation d'énergie :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (65)$$

❖ Approximation e Boussenesq :

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T - T_r))$$

❖ Adimensionnalisation des équations :

Pour la réduction adimensionnelle de ces équations on introduit les échelles caractéristiques tel que :

L = longueur de référence.

$$U_0 = \frac{a}{L} : \text{Vitesse de référence,} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad , \quad [a] = \frac{[\lambda]}{[\rho][c_p]} = \frac{m^2}{s}$$

$$P_0 = \rho U_0^2 : \text{pression caractéristique}$$

$$\Delta T = T_c - T_f : \text{Écart de température de référence}$$

On définit, alors, les variables adimensionnelles suivantes :

$$U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}$$

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_c - T_f}$$

$$\text{Avec } P = [p + \rho_0 g(y \sin \varphi - x \cos \varphi)] / \rho U_0^2 \quad (66)$$

Par l'introduction de ces variables réduites dans les équations (62), (63) et (64) ci-dessus, il en résulte les équations adimensionnelles gouvernantes suivantes :

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (67)$$

- Conservation de la quantité de mouvement dans le cas bidimensionnelle
-

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + P_r \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - R_a P_r \theta \cos \varphi \quad (68)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + P_r \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + R_a P_r \theta \sin \varphi \quad (69)$$

- L'équation d'énergie :

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (70)$$

- Avec $R_a = \frac{g \beta \Delta T L^3}{a v}$: nombre de Rayleigh
 $P_r = \frac{v}{a}$: Nombre de Prandtl

- **Conditions aux limites :**

* Conditions aux limites hydrodynamiques :

$$U = V = 0 \quad \text{sur toutes les parois solides} \quad (71)$$

* Conditions aux limites thermiques :

$$\begin{aligned} X=0 \text{ et } X=L & \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 1 \quad \text{flux imposé} \\ Y = \pm \frac{H}{2} & \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{Parois adiabatiques} \end{aligned} \quad (72)$$

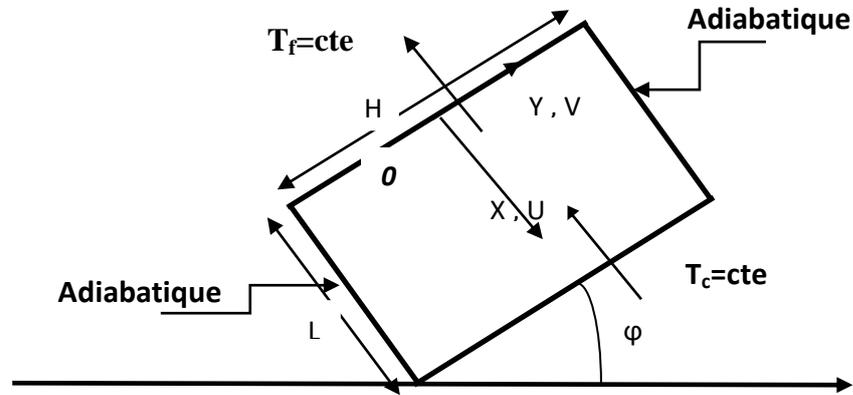


Figure 3 : système étudié
Conditions aux

Transfert de chaleur :

Le transfert de chaleur à travers le système exprimé en termes de nombre de Nusselt local est défini par :

$$Nu = \frac{1}{\theta(1,Y) - \theta(0,Y)} = \frac{1}{\Delta \theta} \quad (73)$$

Le modèle est constitué de 4 équations aux dérivées partielles non-linéaires et couplées. Leur résolution nécessite une méthode numérique.

II- Solution numérique

L'intégration numérique des équations gouvernantes consiste à déterminer les valeurs des variables primitives U, V, P et θ en un certain nombre de points du domaine appelés nœuds, la méthode numérique conduit à un certain nombre d'équations algébriques où les inconnues sont U, V, P et θ .

Il s'agit de diviser le domaine physique en un certain nombre de volume de contrôle entourant chacun un nœud principale P , en chaque volume, différents intégrales sont effectués.

1. Discrétisation des équations gouvernantes par la méthode du volume de contrôle (ou volume finis)

La formulation plus générale des équations de conservations est utilisée. Le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de volume de contrôle, chaque volume caractérisé par son nœud « P » et ses faces qui sont « est », « ouest », « nord » et « sud » désignés respectivement par « e », « w », « n » et « s » figure 3.

Les équations (7, 8, 9) peuvent s'écrire sous la forme condensée (voir chapitre 1) suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\Gamma_\phi}{\sigma_\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S_\phi \quad (74)$$

ϕ : est une variable physique générale qui représente U, V et θ

S_ϕ : Terme source correspondant à la variable ϕ .

Donc c'est les méthodes de discrétisation et de résolution proposées et développer dans les chapitres 1 et 2, qui vont être appliqué dans ce cas. On utilisera un maillage décalé, pour les, les vitesses ne seront donc pas évaluées aux nœuds principaux des volumes mais plutôt aux interfaces de ceux-ci.

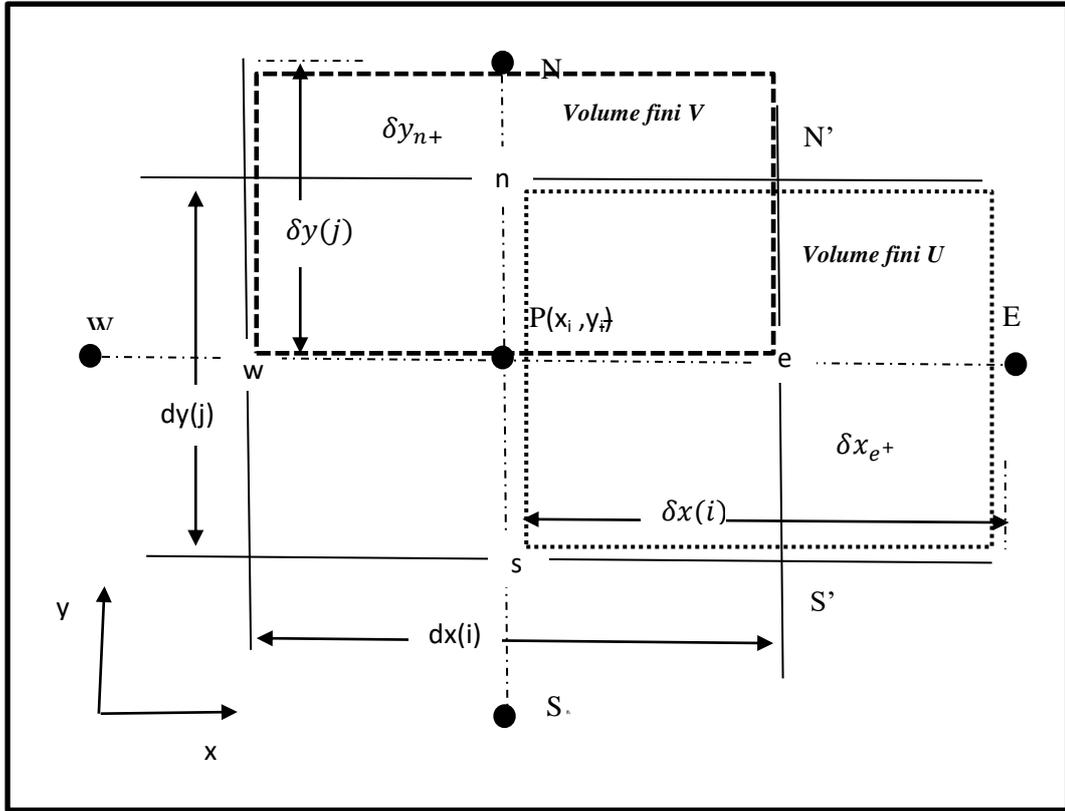


Figure 3: Position et dimensions du volume de contrôle

On a

$$dx_1 = dx(i) = x_{i+1} - x_i \quad , \quad dx_2 = dx(i-1) = x_i - x_{i-1}$$

$$\delta x(i) = \frac{1}{2} (dx_1 + dx_2)$$

$$dy_1 = dy(j) = y_{j+1} - y_j \quad , \quad dy_2 = dy(j-1) = y_j - y_{j-1}$$

$$\delta y(j) = \frac{1}{2} (dy_1 + dy_2)$$

a- Equation de mouvement suivant x

L'équation algébrique de conservation de la quantité de mouvement permet de déterminer la composante du champ de vitesse suivant la direction X. L'équation du mouvement discrétisée dans la direction (x) prend la forme suivante :

$$a_p^U U_p = \sum a_{nb}^U U_{nb} + b^U + A_e(P_p - P_E) \quad (75)$$

Où le terme b^U désigne le terme source correspondant à la composante de la vitesse U, excepté le gradient de pression.

On peut noter d'après la figure 3 que la composante U de la vitesse est calculée sur la face e qui représente le centre du volume de contrôle et les faces sont : (P≡w, E≡e, N'≡n, S'≡s)

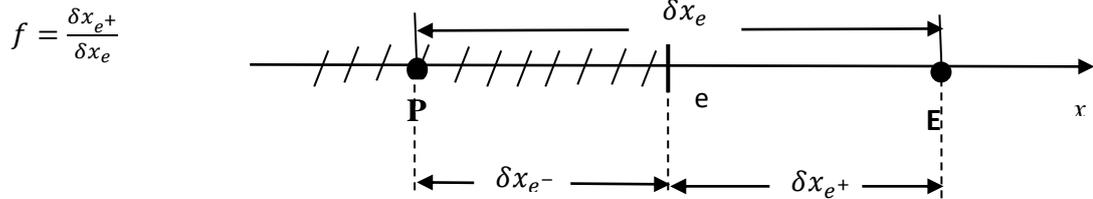
Le terme source est donné par :

$$b^U = -R_a P_r \theta_p \cos\varphi \delta x(i) dy(j) \quad (76)$$

Comme la température sera calculée aux nœuds principaux la valeur θ_p aux interfaces sera calculée de manière suivante :

$$\theta_e = f\theta_p + (1-f)\theta_E \quad (77)$$

f : coefficient de pondération géométrique définie comme suit figure 3 :



b- Equation de mouvement suivant y

L'intégration de l'équation de mouvement dans la direction Y est faite dans le volume de contrôle décalé vers le haut le nœud centrale est n .

$$a_p^V V_p = \sum a_{nb}^V V_{nb} + b^V + A_n(P_p - P_N) \quad (78)$$

Où le terme b^V désigne le terme source correspondant à la composante de la vitesse V, excepté le gradient de pression.

On peut noter d'après la figure 3 que la composante V de la vitesse est calculée sur la face n qui représente le centre du volume de contrôle.

Le terme source est donné par :

$$b^V = -R_a P_r \theta_p \varphi \delta y(j) dx(i) \quad (79)$$

Comme la température sera calculée aux nœuds principaux la valeur θ_p aux interfaces sera calculée de manière suivante :

$$\theta_n = f\theta_p + (1-f)\theta_N \quad (80)$$

f : coefficient définie comme suit figure 3 :

$$f = \frac{\delta y_{n+}}{\delta y_n}$$

c- Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'intégration est faite dans les volumes de contrôle correspondants aux nœuds principaux de l'équation (70), avec un terme source nulle on aura donc :

$$a_p^\theta \theta_p = \sum a_{nb}^\theta \theta_{nb} \quad (81)$$

Les coefficients a_{nb}^θ sont définis au chapitre 1 par les équations (43).

d- Discrétisation des conditions aux frontières :

La qualité de toute simulation numérique est fortement liée à la façon avec laquelle ces conditions aux frontières sont calculées ou imposées (voir chapitre 2, §2).

2-Résolution de équations discrétisées

La méthode numérique de résolution est présentée au chapitre 2, §3. Avec une modification au niveau des étapes de l'algorithme qui font inclure le couplage vitesse-température, soit :

Algorithme de Résolution (SIMPLER →SIMPLEC)

- 1°/ Estimer les champs de vitesse et de Température
- 2°/ Calculer les coefficients de mouvement à partir du champ obtenu en (1) et les vitesses \hat{U} et \hat{V} en utilisant l'équation correspondantes.
- 3°/ Intégrer l'équation discrétisée de pression pour obtenir du champ de pression P*
- 4°/ Intégrer les équations de mouvements pour obtenir le champ de vitesse U* et V*
- 5°/ Intégrer l'équation discrétisée de la correction de pression pour obtenir le champ de pression P'
- 6°/ Corriger le champ de vitesse U et V.
- 7°/ Intégrer l'équation discrétisée de l'énergie pour obtenir le champ de température (T)
- 8°/ Test de convergence :
 - * oui passer à l'étape suivant
 - * Non revenir à l'étape n°2 avec les champs de vitesse (U,V) comme nouvelles estimations
- 9°/ fin des calculs
