Chapitre 2

ANALYSE DIMENSIONNELLE

Appliquée à la convection : Détermination du coefficient h

SIMILITUDE

I- INTRODUCTION

La complexité des phénomènes de convection rend nécessaire l'utilisation de techniques générales qui permettent de limiter le nombre des paramètres d'un problème. Ces techniques sont l'analyse dimensionnelle et la similitude.

Décrire un phénomène physique revient, d'une façon générale à établir un ou plusieurs relations liant des grandeurs physiques qui décrivent le phénomène physique concerné.

Le ***but commun de l'analyse dimensionnelle et la similitude est de déterminer***, à partir des grandeurs physiques dimensionnelles qui interviennent, un plus petit nombre de groupements sans dimension.

Pour appliquer les méthodes de l'analyse dimensionnelle, il suffit de connaître toutes les grandeurs physiques intervenant, ainsi que leur dimension. Par contre les méthodes de similitude imposent la connaissance des équations régissant le phénomène.

Il ne faut pas perdre de vue que notre but c'est le calcul ***de densité de Flux thermique transféré par l'écoulement.***

$$\varphi = h.(T_p - T_\infty)$$

φ : Densité de Flux transféré, en W/m^2

$T_p - T_\infty$: Ecart de température entre la paroi et le fluide à l'infini, en K

$h.$: Coefficient d'échange de chaleur en W/(m^2.K)

II – ANALYSE DIMENSIONNELLE.

II-1 : Remarques :

L'analyse dimensionnelle diffère des autres méthodes d'approche par le fait qu'elle ne donne pas d'équations pouvant être résolues, et ce qui la limite c'est le fait qu'elle ne donne pas d'informations au sujet de la nature du phénomène.
Aussi pour appliquer l'analyse dimensionnelle il est indispensable de connaître au préalable les variables qui influencent le phénomène ce qui nécessite une expérience.

II-2. Principe :

Tout phénomène est fonction d'un certain nombre de grandeurs ($E_1, E_2, E_3, ..., E_p$) indépendantes ou liées. Etablir une loi physique consiste à chercher une relation mathématique entre les différentes variables $E_1, E_2, ...E_p$ intervenant dans le phénomène, si la relation existe, elle peut s'exprimer sous la forme :

$$f(E_1, E_2, E_3, ..., E_p) = 0 \qquad \text{(II-1)}$$

qui est la forme la plus générale de n'importe quelle équation physique complète à l'équilibre du système.

Le phénomène est indépendant des unités choisies pour les différentes grandeurs. Il doit être de même pour la relation f.

L'application de l'analyse dimensionnelle permet de transformer

$$f(E_1, E_2, E_3, ..., E_p) = 0 \qquad \textbf{\textit{en}} \qquad F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...) = 0 \qquad \text{(II-2)}$$

$E_1, E_2, E_3 ... E_p$ Variables avec dimension.
$\pi_1, \pi_2, \pi_3 ...$ Nombres ou groupements sans dimension.

Pour établir l'expression des nombres sans dimension figurants dans F on peut utiliser une des deux méthodes suivantes :

1-l'application du théorème des π de Buckingham.
2-La normalisation des équations différentielles décrivant le phénomène physique.

Les deux méthodes conduisent évidemment aux mêmes résultats, la seconde méthode exige de connaître des équations, tandis que la première n'exige que la connaissance de tous les paramètres qui ont une influence sur le phénomène physique.

II-2-1 : Théorème π de Bulkingham (1890-1915)

D'après ce théorème, le nombre des groupes indépendants adimensionnels qui peut être formé par la combinaison des variables physiques $E_1, E_2 ... E_p$ du problème donné, est égal au nombre total de ces quantités physique p diminué du nombre des dimensions fondamentales q nécessaires pour exprimer les formules dimensionnelles des p quantités physiques.

Si $\pi_1, \pi_2 \ldots$, groupements sans dimension, alors leur nombre est donné par :

Nombre = p – q groupements.

Le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM permet de prévoir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant le phénomène étudié s'écrira:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{p-q}) = 0 \qquad \text{(II-3)}$$

L'établissement de cette relation se fait en deux étapes :

la première étape : consiste à choisir un système de dimensions fondamentales. Ce choix est arbitraire, mais les formules dimensionnelles de toutes les variables appropriées $E_1, E_2, \ldots$ doivent être exprimées en fonction des dimensions fondamentales, dans le système international, Celles-ci sont :

La longueur L
Le temps T
La température θ
La masse M

La formule dimensionnelle d'une grandeur physique découle des définitions et des lois physiques.

Exemple : La longueur d'une barre $\rightarrow$ $[L]$

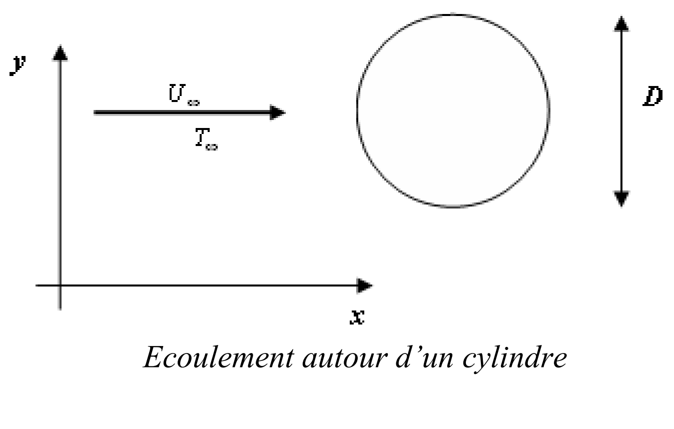
La vitesse d'une particule fluide $\rightarrow$ $[L]/[T] = [LT^{-1}]$

La deuxième étape : détermination des groupements adimensionnels.

On se propose de déterminer les groupements adimensionnels dans les cas suivants :

1er cas : Convection forcée sans changement d'état

Etude de l'échange de chaleur par convection forcée entre un cylindre infiniment long chauffé par un fluide arrivant perpendiculairement à son axe et à vitesse constante : Le problème consiste à préciser l'expression du flux thermique φ échangé entre le fluide extérieur à la température T∞ et une longueur unité de la surface du tuyau à la température Tp



Ecoulement autour d'un cylindre

A partir de la description du processus de la transmission de chaleur par convection, il est raisonnable d'admettre que les quantités physiques considérées dans le tableau ci dessous sont approprié au problème posé :

Grandeurs	**Symbole**	**Unités *SI***	**Équations aux dimensions**
- Diamètre du tube	D	m	$[L]$
- Vitesse du fluide	U_∞	m/s	$\left[LT^{-1}\right]$
- Masse volumique du fluide	ρ	Kg/m^3	$\left[ML^{-3}\right]$
- Viscosité dynamique du fluide	μ	Kg/(m.s)	$\left[ML^{-1}T^{-1}\right]$
- Conductance thermique du fluide	λ	W/(m °c)	$\left[MLT^{-3}\theta^{-1}\right]$
-Capacité calorifique du fluide à pression constante.	C_P	J/(Kg °c)	$\left[L^2T^{-2}\theta^{-1}\right]$
- Coefficient d'échange de chaleur	h	W/(m^2 °c)	$\left[MT^{-3}\theta^{-1}\right]$
- Ecart des températures extrêmes	$T_p - T_\infty$	°c	$[\theta]$

C'est à dire la relation physique à rechercher entre les différentes variables D,$U_\infty, \rho, \mu, \lambda, C_P, h, T_p - T_\infty$ intervenant dans le phénomène est :

$$f\,(D,U_\infty, \rho, \mu, \lambda, C_P, h, T_p - T_\infty) = o \qquad \text{(II-4)}$$

on a donc p = 8 grandeurs physiques
q = 4 dimensions fondamentales L, M, T, θ
on conclut donc, que nous aurons 8 - 4 = 4 groupements adimensionnels à rechercher.

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = o \qquad \text{(II-5)}$$

Pour trouver ces groupements, on écrit π sous la forme d'un produit de variables chacun ayant un exposant inconnu.

$$\pi = D^a \,.\, \lambda^b .U_\infty^c . \rho^d \,.\, \mu^e .\, c_p^f \,.\, h^g \,.\, (T_p - T_\infty)^i \qquad \text{(II-6)}$$

où *a, b, c, d, e, f, g, i* sont 8 paramètres inconnus

Ce qui correspond à l'équation en dimension d'un groupement π suivante :

$$[\pi] = [L]^a . \left[MLT^{-3}\theta^{-1}\right]^b . \left[LT^{-1}\right]^c . \left[ML^{-3}\right]^d . \left[ML^{-1}T^{-1}\right]^e . \left[L^2T^{-2}\theta^{-1}\right]^f . \left[MT^{-3}\theta^{-1}\right]^g . [\theta]^i \qquad \text{(II-7)}$$

ou encore

$$[\pi] = [M]^{b+d+e+g} . [L]^{a+b+c-3d-e+2f} \, [T]^{-3b-c-e-2f-3g} . [\theta]^{-b-f-g+i} .$$

Le groupement π doit être sans dimension, c'est-à-dire : chacun de ces termes en exposant doit être nul.

$$\begin{array}{ll} [M] & b + d + e + g = o \\ [\mathbf{L}] & a + b + c \ -3d - e + 2f = o \\ [T] & -3b - c - e - 2f - 3g = o \\ [\theta] & -b - f - g + i \ = o \end{array} \qquad (\text{II-8})$$

C'est un système de 4 équations à 8 inconnus *a, b, c, d, e, f, g, i* de point de vue mathématique 4 des 8 inconnus peuvent être choisit arbitrairement, la seule restriction concernant ce choix est que chaque exposant choisi doit être indépendant des autres. Un exposant est indépendant si le déterminent formé par les coefficients des termes restant n'est pas nul.

Avec un peut de chance et de sens physique on arrive à résoudre ce système, en adoptant la démarche suivante :

- comme il s'agit de déterminer l'expression du coefficient d'échange de chaleur par convection ***h***, il est commode de poser son exposant g = 1 (Pour obtenir une loi de la forme h = f (. . .)).
- et en même temps on admet que *c = d =0,(le groupement π trouvé ne dépendra pas de l'énergie cinétique du fluide* ρU^2*).*
- *i = o*.(Le groupement π trouvé ne dépendra pas de l'écart de température Tp - T∞).

Par résolution du système d'équations *(*II-8*)* d'après ce choix on obtient :

$$a = 1, \qquad b = -1, \qquad e = f = o$$

Donc, on obtint le premier groupement adimensionnel

$$\pi_1 = \frac{hD}{\lambda} = Nu \quad \text{Appelé nombre de Nusselt.}$$

Signification du Nombre de Nusselt Nu : c'est le rapport entre le flux de chaleur transféré par convection et le flux de chaleur par conduction (Flux de référence)

$$Nu = \frac{(\text{ DL=s })\text{h} (\text{ Tp - T}\infty)}{(\text{ DL=s })\lambda \ \ [(\text{Tp - T}\infty) / \text{D}]} = \frac{hD}{\lambda}$$

On choisit *g = o* (la variable ***h*** figure dans un nombre sans dimension ce qui rend légitime ce choix).

On admet que *a = 1 et f = i = o*. de manière à ne conserver que les caractéristiques de l'interaction fluide-obstacle créant le transfert de chaleur

- celles du fluide ρ et μ
- celles de l'écoulement: **U∞ , D**

Par résolution du système *(*II-8*)* on obtient :

$$b = o, \ \ c = d = 1, \qquad e = -1$$

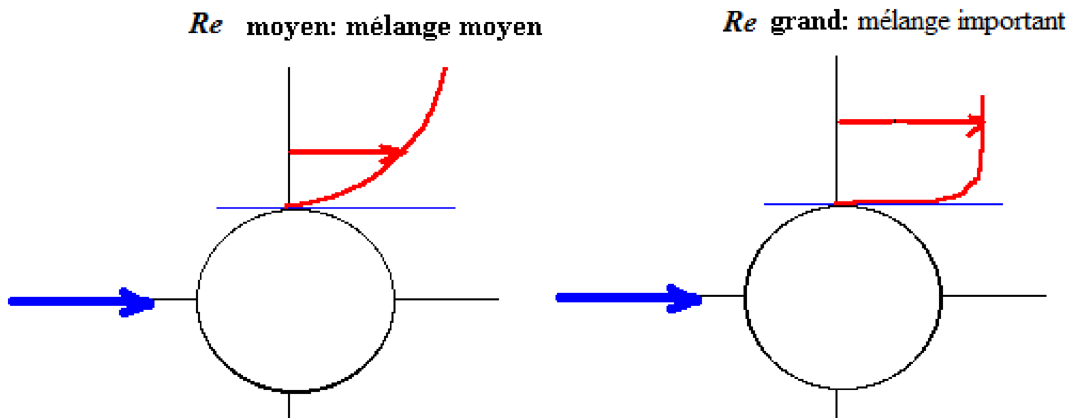
Soit

$$\pi_2 = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} = \text{Re} \qquad \text{c'est le nombre de Reynolds.}$$

Signification du Nombre de Reynolds Re :

$$Re = \frac{\text{Forces d'inertie}}{\text{Forces de viscosité}} = \frac{\rho U_{\infty} D}{\mu}$$

Re caractérise la forme du profil de vitesse de l'écoulement fluide



On choisit *c = g = e = i = o; de manière à ne conserver que les caractéristiques du fluide:* ρ, μ, λ et C_P.

Par résolution du système *(*II-8*)* on obtient :

$$a = d = o \text{ et } f = 1$$

soit

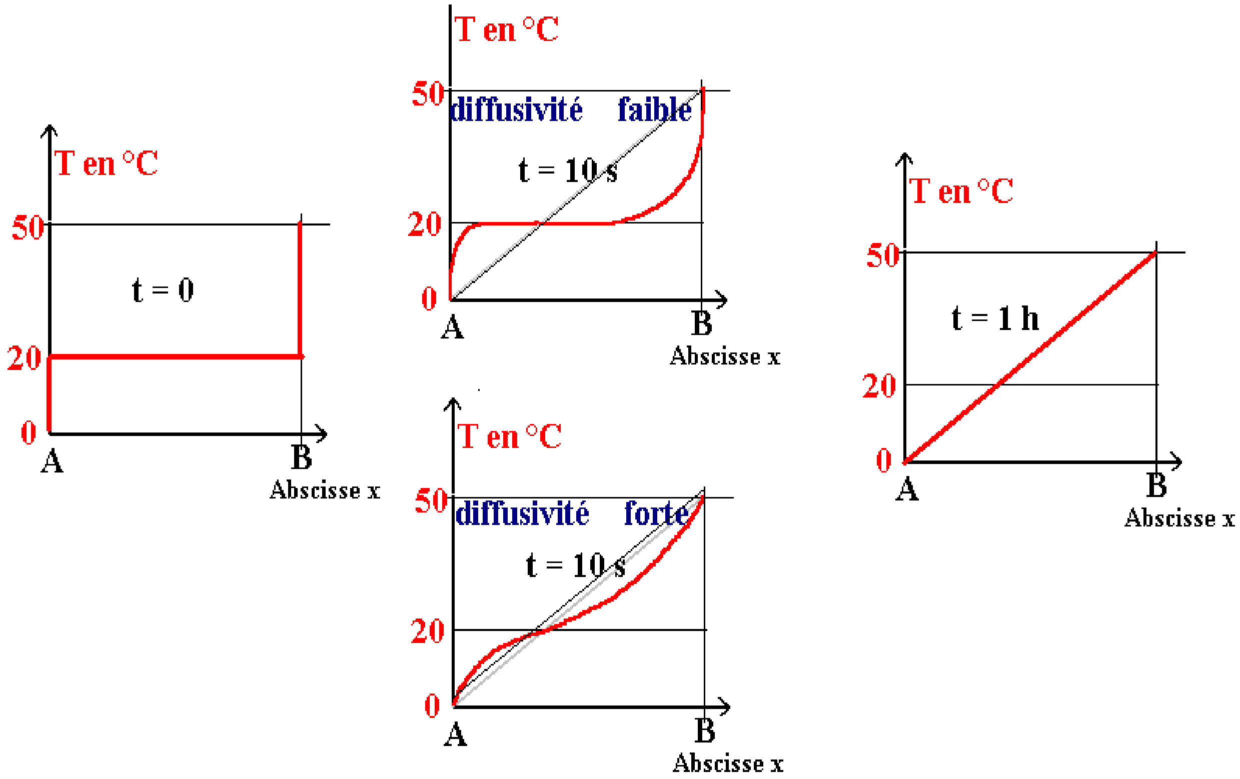
$$\pi_3 = \frac{\mu \, Cp}{\lambda} = Pr$$ C'est le nombre de Prandtl.

Signification du Nombre de Prandtl Pr :

$$Pr = \frac{\text{Viscosité dynamique}}{\text{Diffusivité thermique}} = \frac{\mu / \rho}{\frac{\lambda}{\rho Cp}} = \frac{\mu \, Cp}{\lambda}$$

Pr compare les influences respectives:

- du profil de vitesse du fluide *(viscosité)*
- du profil de température *(diffusivité)*



On choisit *a = b = d = e = o ;* par résolution du système on *(*II-8) obtient :

$$g = o,\ \ c = 2,\ \ i = 1, f = -1$$

Soit

$$\pi_4 = \frac{U_\infty^2}{Cp\ \Delta T} = Ec$$

C'est le nombre d'Eckert. ***Il n'intervient que dans la description d'écoulements proches de la vitesse du son.***

Conclusion de l'analyse dimensionnelle : Le transfert de chaleur par convection forcée implique une relation entre 4 nombres sans dimension. L'équation *(*II-5*)* s'écrit alors

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = o \qquad (II\text{-}9)$$

ou encore

$$\boldsymbol{F(Nu, Re, Pr, Ec) = 0}$$

L'importance de cette réduction de variables apparaît lorsqu'on cherche une corrélation entre les données expérimentales : Loi de la convection forcée :

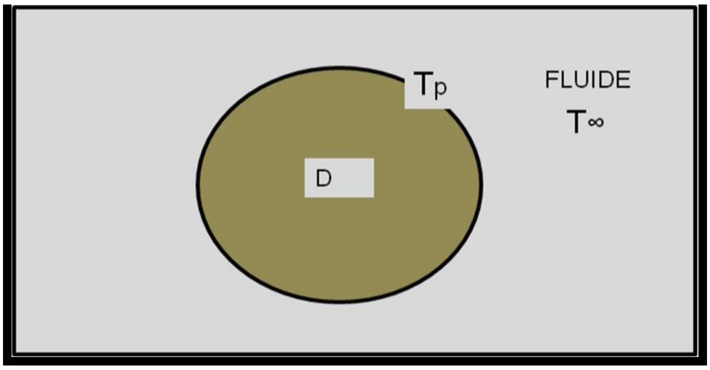
$$\boldsymbol{Nu = f(Re, Pr, Ec)} \qquad (II\text{-}10)$$

Exemple de corrélation expérimentale :

$$Nu = \frac{h\,D}{\lambda} = 0.023\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}^{0.8}$$ Corrélation de COLBURN

<u>2^{ième} cas :</u> Convection Naturelle (libre) sans changement d'état.

On considère un fluide au repos à la température To dans lequel on place un cylindre horizontal chauffé uniformément à la température T_P (figure ci-dessous). et on se propose d'étudier *l'échange de chaleur par convection naturelle autour du cylindre.*



Apriori la densité ρ est fonction de la température et de la pression par la loi d'état (pour un gaz mais aussi pour un liquide). Il est donc naturel de penser que si l'on chauffe une paroi, la température du fluide environnant augmente par diffusion. La stratification de pression s'en trouve changée, le gradient de pression crée le mouvement.
Puisque c'est le chauffage qui provoque le mouvement. On va donc permettre une variation de la densité avec le chauffage en supposant cependant que cette perturbation est petite.

Il faut donc introduire une variation de ρ autour d'une position d'équilibre: le repos. En revanche la viscosité μ reste toujours constante.

Pour obtenir la dépendance de ρ, rappelons les cœfficients thermodynamiques classiques:

- *Coefficient de dilatation à pression constante:* $\beta = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_P = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}$
- *Coefficient de dilatation à pression constante:* $\chi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}$

Donc ρ est une fonction de T et de P

- *Le développement de Taylor de ρ(T,P) à l'ordre 1 au voisinage de* $T=T_\infty$ *et* $P=P_\infty$ donne :

$$\rho = \rho_\infty(1+\beta(T-T_\infty)+\chi(P-P_\infty)+...$$

- *Les variations de pression sont négligeables, nous conservons que l'influence de la température sur la densité ρ.*
- $$\rho = \rho_\infty(1+\beta(T-T_\infty))$$

Hypothèses :

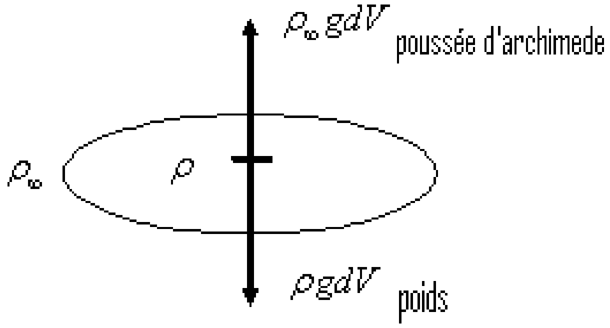
- propriétés physique : λ, μ, c sont supposées uniformes.
- On admet que $\rho = cst = \rho_o$ est uniforme, sauf dans les termes expriment les forces de gravité (approximation de Boussenesq).

$$\rho = \rho_\infty(1+\beta(T-T_\infty)) \qquad \text{(II-11)}$$

$\beta = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_P = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial T})_P$ Coefficient de dilatation volumique à pression constante.

Une particule fluide de masse volumique ρ et de volume dV située au voisinage d'une paroi chaude sera soumise aux forces suivantes :

- le poids : $\rho g dV$
-
- la poussée d'Archimède : $\rho_\infty g dV$



La résultante des forces s'exerçant verticalement sur la particule est donnée par :

$$F = (\rho_\infty - \rho) g\, dV \quad ;$$

On pose f : Force par unité de masse, soit $f = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} g$

D'après l'hypothèse de Boussenesq $\rho_\infty - \rho << \rho_\infty \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} g$ c'est à dire $\rho \approx \rho_\infty$

En utilisant la relation (II-11) on a :

$$\frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} = \beta(T-T_\infty) \quad et \quad f = \beta g (T-T_\infty) \qquad \text{(II-12)}$$

En convection libre ce sont les différences de masse volumique dans le fluide qui sont à l'origine de son mouvement.

D'après la relation (II-12) il y a couplage entre les champs de vitesse et de températures par l'intermédiaire du terme $\beta g(T-T_o)$. Finalement, pour l'étude de l'échange de chaleur par convection naturelle, les variables physiques appropriées sont $(\ell, \upsilon, \beta g, T-T_o, a, \lambda, \varphi)$.

Symbole	**Grandeurs**	**Unités** *SI*	**Équations aux dimensions**
- ℓ	Longueur	m	$[L]$
- υ	Viscosité cinématique	m^2/s	$[L^2T^{-1}]$
- β	Coefficient de dilatation	$1/°c$	$[\theta^{-1}]$
- g	Accélération	m/s^2	$[LT^{-2}]$
- $T-T_o$	Différence de température = ΔT_o	°c	$[\theta]$
- a	Diffusivité thermique	m^2/s	$[L^2T^{-1}]$
- λ	Conductivité thermique du fluide	w/m °c	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$
- φ	Flux de chaleur $\varphi = h(T-T_o)$	w/m^2	$[MT^{-3}]$

C'est à dire

$$f(\ell, \upsilon, \beta g, T-T_o, a, \lambda, \varphi) = o \qquad \text{(II-13)}$$

Il y a, donc, 7 variables physiques appropriées et 4 dimensions fondamentales $\Rightarrow$ 7-4=3 groupes sans dimensions, On a alors :

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = o \qquad \text{(II-14)}$$

Pour exprimer ces groupements, on suit la même démarche que précédemment :

$$\pi = \ell^a.\nu^b.(g\beta)^c.(T-T_o)^d.a^e.\lambda^f.\varphi^g$$

Avec l'équation au dimension suivante :

$$[\pi] = [L]^a.[L^2T^{-1}]^b.[LT^{-2}\theta^{-1}]^c.[\theta]^d.[L^2T^{-1}]^e[MLT^{-3}\theta^{-1}]^f.[MT^{-3}]^g.$$

On exprime que π est sans dimensions $\Rightarrow$ un système d'équation à résoudre, ce qui aboutit aux résultats suivants :

$$\pi_1 = \frac{\varphi\,\ell}{\lambda\,\Delta T_o} = Nu \qquad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$\pi_2 = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu}{\rho_o}\frac{\rho_o Cp}{\lambda} = \frac{\mu Cp}{\lambda} = \Pr \qquad \text{Nombre de Prandtl.}$$

Puis un nouveau nombre qui caractérise la convection libre.

$$\pi_3 = \frac{\beta g\,\Delta T_o \ell^3}{\nu^2} = Gr \qquad \text{nombre de Grashof}$$

Le nombre Gr est le rapport des forces d'Archimède aux forces de viscosité plus Gr est grand plus les forces d'Archimède sont importantes ce qui a une influence à mettre le fluide en mouvement. Et l'équation (II-14) s'écrit

$$F(Nu, \mathrm{Pr}, Gr) = o$$

Ou encore

$$Nu = f(Gr, \mathrm{Pr}) \qquad \text{(II-15)}$$

La relation (II-15) est une corrélation à déterminer expérimentalement.

Remarque : Le nombre de Reynolds n'apparaît pas en convection naturelle, puisqu'il n'y a pas d'écoulement imposé *(Uo* = o). Mais on peut calculer un nombre de Reynolds Re local qui correspond au mouvement induit par les gradients de densité ρ.

II-2-2 Limite du théorème des π

-Le théorème des π n'est plus applicable lorsque les équations (système d'équation des puissances) où intervient les puissances des variables forment un système linéairement dépendant, c'est à dire, si les équations ne sont pas indépendantes, le nombre des groupes adimensionnels est égal au nombre total des p variables diminué du nombre des équations indépendantes.

III - SIMILITUDE

III-1 Introduction

Les équations régissant le transfert de chaleur et de masse sont très compliquées et ne peuvent être résolues que pour des cas très simples. Pour cette raison, on est souvent contraint d'utiliser les méthodes expérimentales pour évaluer les différents effets liés à un écoulement de fluide. Dans beaucoup de cas l'expérimentation directe sur prototype, c'est à dire en vraie grandeur, de l'installation dont on souhaite prédéterminer le comportement est délicate voir impossible. On est dès lors conduit à tester des modèles généralement à échelle réduite. *Modèle ou maquette permet une expérimentation aisée, un gains de temps d'exploitation, une réduction des dépenses d'essais et de construction, avec possibilité d'amélioration.*

On peut résumer en conclusion que les essais sur modèle donne des informations non seulement utilises mais souvent indispensables car ils permettent d'obtenir soit des solutions que les théories et moyens techniques ou informatiques sont impuissantes de les fournir soit des renseignements complémentaires. En outre peuvent également servir de vérifier le bien fondé, l'exactitude de solutions obtenues à partir de méthodes théorique appliquées.

Pour que les résultats de mesures sur modèle puissent être transposés au prototype, certains conditions devront être respectées, c'est à dire que les grandeurs qui caractérisent le modèle devront satisfaire à un certain nombre de relations appelées : *conditions de Similitude*:

Les comportements fluides seront ainsi en similitude physique s'il y a

- *similitude géométrique*
- *similitude cinématique*
- *similitude dynamique*
- *similitude thermique.*

Ces conditions seront vérifiées lorsque les nombres sans dimensions correspondant à chaque cas seront identiques pour le modèle et la maquette. En effet, on cherche la solution des équations d'écoulement et de transfert de chaleur pour deux écoulements où les conditions aux limites sont identiques, mais les échelles géométriques sont différentes.

III-2 Normalisation des équations différentielles

Normalisation des équations différentielles est une autre façon pour établir l'expression des nombres sans dimension (voir équations établies en annexe A).

III-2-1. Cas de la convection forcée

a- Equations

Considérons un écoulement avec les hypothèses suivantes :

- Stationnaire, Incompressible $\rho = cste$.
- viscosité $\mu = cste$, sans présence de forces massiques.
- T_p-T_f variations faibles

Les équations décrivant le phénomène sont :

- *Continuité*

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \tag{II-16}$$

- *Équation de Navier Stokes*

$$\rho(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}p + \mu\overrightarrow{\nabla^2}\vec{V} \tag{II-17}$$

- Conservation d'énergie

$$\vec{V}\vec{\nabla}T = \frac{\lambda}{\rho c_P}\Delta T \tag{II-18}$$

En considérant que la dissipation est négligeable dans l'équation d'énergie.

Pour la réduction adimensionnelle de ces équations on introduit les échelles caractéristiques tel que :

L= longueur de référence.

$U_\infty =$ Vitesse de référence

$P_0 = \rho U_\infty^2$ pression caractéristique

$\Delta T_0 = T_p - T_\infty$ écart de température de référence

On définit, alors, les variables adimensionnelles suivantes :

$$U' = \frac{U}{U_\infty},\quad V' = \frac{V}{U_\infty},\quad x' = \frac{x}{L},\quad y' = \frac{y}{L},\quad z' = \frac{z}{L}$$

$$p' = \frac{P}{\rho U_\infty^2},\quad T' = \frac{T - T_p}{T_p - T_\infty} = \frac{T - T_p}{\Delta T_0}$$

Par l'introduction de ces variables réduites dans les équations (II-16), (II-17) et (II-18) ci-dessus on obtient :

- *-Continuité*

$$\overrightarrow{\nabla'}.\ \overrightarrow{V'} = 0 \tag{II-19}$$

- *-Équations de Navier Stokes*

$$\rho\frac{U_\infty^2}{L}(\overrightarrow{V'}.\overrightarrow{\nabla'})\overrightarrow{V'} = -\frac{\rho U_\infty^2}{L}\overrightarrow{\nabla'}p' + \frac{\mu U_\infty}{L^2}\overrightarrow{\nabla'^2}\overrightarrow{V'}$$

Ou encore

$$(\overrightarrow{V'}.\overrightarrow{\nabla'})\overrightarrow{V'} = -\overrightarrow{\nabla'}p' + \frac{\mu}{\rho U_\infty L}\overrightarrow{\nabla'^2}\overrightarrow{V'} \tag{II-20}$$

- *-Équation d'énergie*

$$\overrightarrow{V'}.\overrightarrow{\nabla}T' = \frac{\lambda}{\rho C_p}\frac{\rho}{LU_\infty}\overrightarrow{\nabla}T' \tag{II-21}$$

On constate l'apparition de deux groupements dans les équations (II-20) et (II-21) qui sont :

- Nombre de Reynolds qui caractérise le rapport

$$Re = \frac{forces\ d'inertie}{forces\ de\ visiosité} = \frac{\rho(\vec{V}.\overrightarrow{\nabla\vec{V}})}{\mu\nabla^2\vec{V}} = \frac{\frac{\rho U_\infty^2}{L}}{\frac{\mu U_\infty}{L^2}} = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$$

- Nombre de Peclet

$$\rho\frac{U_\infty L C_p}{\lambda} = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}.\frac{\mu C_p}{\lambda} = Re.Rr = Pe$$

La solution des équations (II-19), (II-20) et (II-21) pour V’, P’ et T’ sont évidemment identique pour le modèle et l’originales pour vu que les groupements adimensionnels ***Re*** et ***Pe*** soit identiques et que les conditions aux limites soient les mêmes. Ces derniers ne sont pas les mêmes que si le modèle est une reproduction géométrique exacte de l’original et que les conditions en amont et aval sont identiques. C’est ce que nous appelons critères de similitude.

b- Critères de similitude

Pour des systèmes géométriquement semblables, les champs de vitesses seraient similaires si et seulement si le nombre de Re est le même dans les deux fluides 1 et 2.

$$Re_{f1} = Re_{f2}$$

Par conséquent on s’attend en convection forcée à des conditions d’écoulement semblables pour une même valeur du nombre de ***Re***.

Pour des systèmes géométriquement semblables ayant les mêmes nombre de Reynolds, la répartition des températures seraient similaire si et seulement si ***Pe*** est le même, c'est-à-dire :

$$Pr = \frac{\mu / \rho}{\lambda / \rho C_p} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$ Rapport de deux propriétés de transport moléculaires :

$* \nu = \frac{\mu}{\rho}$ viscosité cinématique qui affecte la distribution des vitesses

$* a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ diffusivité thermique qui affecte la distribution des températures

En d’autre terme c’est un groupement adimensionnel reliant la répartition des températures à celle des vitesses.

Si on considère l’exemple du cylindre, le flux de chaleur échangé entre le cylindre et le fluide par unité de longueur *L* à pour expression :

$$\varphi = h.\pi DL.(T_p - T_\infty) \qquad \text{(II-22)}$$

Si on prend comme référence pour le flux de chaleur le flux de chaleur échangé par conduction

$$\varphi_r = \lambda.\pi DL.\frac{(T_p - T_\infty)}{D}$$

on aura

$$\frac{\varphi}{\varphi_r} = \frac{h\pi DL(T_p - T_\infty)}{\lambda \pi DL \frac{T_p - T_\infty}{D}} = \frac{hD}{\lambda} = \boldsymbol{Nu} : \quad \text{nombre de Nusselt} \qquad \text{(II-23)}$$

On peut s’attendre dans des systèmes géométriquement semblables et ayant des champs de vitesse et de température semblables, a avoir les mêmes valeurs numériques des nombres de Nusselt.

III-2-2. Cas de la convection naturelle

a-Equation

On considère le problème de convection naturelle autour d'un cylindre. Les équations de conservations qui décrivent le phénomène sont :

- *Équation de continuité*

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \qquad \text{(II-24)}$$

- *Équation de conservation de la quantité de mouvement*

$$\rho(\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla}p + \mu\overrightarrow{\nabla^2}\vec{V} - \rho\vec{g}\beta(T - T_0) \qquad \text{(II-25)}$$

- *Équation de conservation d'énergie*

$$\vec{V}\vec{\nabla}T = \frac{\lambda}{\rho C_p}\Delta T \qquad \text{(II-26)}$$

Par l'introduction des grandeurs de référence suivantes :

- L= longueur de référence
- $\Delta T_0 = T_p - T_0$ écart de température de référence
- quant à V_0 vitesse de référence, il n'y a pas de mouvement sans gradient de température, de sorte qu'on a plus une vitesse mesurable à l'avance, il faut donc chercher un terme homogène à une vitesse qui puisse constituer un élément pertinent de référence pour la vitesse. Puisque le mouvement est du au terme des forces de gravité, donc il faut chercher de ce côté là.

Les équations de conservations deviennent :

- ✓ *Équation* de *continuité*

$$\overrightarrow{\nabla^+}.\ \overrightarrow{V^+} = 0 \qquad \text{(II-27)}$$

- ✓ *Équation de conservation de la quantité de mouvement*

$$\rho\frac{V_0^2}{L}.\overrightarrow{\nabla^+}(\overrightarrow{\nabla^+}\overrightarrow{V^+}) = -\overrightarrow{\frac{\rho V_0^2}{L}\nabla^+}P^+ + \frac{\mu V_0}{L^2}\overrightarrow{\nabla^{+2}}\overrightarrow{V^+} - \rho g\beta\Delta T_0(T^+)$$

Ou encore sous la forme

$$\overrightarrow{V^+}.\overrightarrow{\nabla}^+\overrightarrow{V^+} = \overrightarrow{\nabla^+}P^+ + \frac{\mu}{\rho L V_0}\overrightarrow{\nabla^{+2}}\overrightarrow{V^+} - \frac{gL\beta\Delta T_0}{V_0^2}T^{+2} \qquad \text{(II-28)}$$

- ✓ Équation d'énergie

$$\Delta T_0\frac{V_0}{L}\overrightarrow{V^+}\overrightarrow{\nabla^+}T^+ = \frac{\lambda}{\rho C_p}\frac{\Delta T_0}{L^2}\Delta^+T^+$$

Que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{V}^+\vec{\nabla}^+T^+ &= \frac{\lambda}{\rho C_P L V_o}\Delta^+T^+ \\ &= \frac{1}{Gr^{1/2}Pr}\Delta^+T^+\end{aligned} \qquad \text{(II-29)}$$

b-Critères de Similitude :

<u>Relativement aux forces de volume</u> $\beta g(T - T_o)$, dans l'équation (II-28), le critère de similitude est le nombre.

$$Ri = \frac{gL\beta\,\Delta T_o}{V_o^2}$$ Appelé nombre de Richardson

Pour que ce terme ait le même ordre de grandeur que les autres termes de l'équation (II-28) on prend

$$Ri = 1 = \frac{gL\beta\Delta T_o}{V_o^2} \quad \Rightarrow \quad V_o = (g\beta L\,\Delta T_o)^{1/2}$$

Ce qui permet de calculer la quantité $V_o = (g\beta L\,\Delta T_o)^{1/2}$ qui a les dimensions d'une vitesse.
Ce qui est à la fois logique, puisque ΔT_o *et* β sont à l'origine du mouvement, et commode par ce que $Ri = 1$ en convection libre.

<u>Relativement aux forces de viscosité</u>, le terme $\frac{\nu}{LV_0}$ devient en remplaçant V_o par sa valeur ci-dessus.

$$\frac{\nu}{LV_o} = \frac{\nu}{L(gL\beta\,\Delta T_o)^{1/2}}$$

Ou encore

$$\frac{1}{(\frac{\nu}{LV_o})^2} = \frac{L^3 g\beta\,\Delta T_o}{\nu^2} = Gr$$ Appelé nombre de Grashof

Avec $$Gr^{1/2} = \frac{forces\ d'Archimède}{forces\ de\ viscosité} = \frac{\rho g\beta\Delta T_0}{\frac{\mu V_0}{L^2}} = \frac{(g\beta L^3\Delta T_0)^{1/2}}{\nu}$$

On retrouve le nombre Gr (Grashof) qui conserve le concept de critère de similitude.

<u>Relativement à la diffusion thermique</u>, la structure des critères de similitude reste donc la même qu'en convection forcée.

Le terme représentant peut s'écrire :

$$\frac{\lambda}{\rho c_p}\,\frac{1}{LV_o} = \frac{a}{LV_o} = \frac{a}{(g\,\beta\,\Delta T_o)^{1/2} L^{3/2}} = \frac{1}{Gr^{1/2} Pr}$$

C'est à dire, lorsque des corps géométriquement semblables sont chauffés ou refroidis par convection naturelle, la similitude des champs de vitesse et de température exige que les nombres Gr et Pr soient égaux en des points correspondants.
En convection libre, d'autres nombres peuvent être introduite tel que

$$Bo = \frac{g\beta\Delta T_o L^3}{a^2}$$ Nombre de Boussinesq qui constitue un critère de similitude.

Ou $$Ra = \frac{g\beta\Delta T_o L^3}{\nu\, a} = Gr\ Pr$$ Nombre Rayleigh (d'un usage ancien plus répondu)

Nous observons que

$$\boldsymbol{Bo = Ra\ Pr = Gr\ Pr^2}$$

Le nombre de Grashof ***Gr*** joue le rôle de nombre de ***Re*** en convection libre et la transition du laminaire au turbulent est gouvernée par le nombre de Grashof représentant, dans l'équation de quantité de mouvement, le critère de similitude relatif aux forces de viscosité.

<u>Relative au Transfert de chaleur</u>

Le nombre sans dimension associée au flux de chaleur est un critère de similitude relatif à la diffusion thermique :

$$\frac{\lambda}{\rho c_p L V_o} = \frac{\varphi_p}{\rho C p V_o \Delta T_o}$$

avec $\varphi_p = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=o} = h(T_p - T) \Rightarrow \frac{\lambda \Delta T_o}{L}$ flux de chaleur avec référence à la paroi.

$$\frac{\lambda}{\rho C_p L V o} = \frac{\varphi_p}{\rho C_p (g \beta L \Delta T_o)^{1/2} \Delta T_o} = \frac{\varphi_p}{\rho C_p (g \beta L)^{1/2} \Delta T_0^{3/2}} = St$$

St : nombre de **Stonton** est un critère de similitude.

Dans la pratique, on se sert du nombre de **Nusselt**.

$Nu = \dfrac{\varphi_p L}{\lambda \Delta To}$ *qui n'est pas un critère de similitude, il est plutôt utilisé pour le calcul de h.*

Donc la normalisation des équations différentielles décrivant un phénomène de convection forcée ou libre permet de retrouver les mêmes groupements adimensionnels établis par le théorème des π de Buckingham.

IV- CONCLUSIONS

L'analyse dimensionnelle est une méthode puissante, car, en l'absence d'équation de conservation elle permet de déterminer des groupes adimensionnels qui caractérisent un phénomène physique. Elle a cependant des limites :

-Elle ne renseigne pas sur la nature physique du phénomène.

-Elle ne conduit à des résultats significatifs que si le décompte des grandeurs est exact et complet.

-Elle doit être complétée par une étude expérimentale pour préciser la forme de la relation liant les groupements sans dimension.

On peut résumer en conclusion que les essais sur modèle donne des informations non seulement utilises mais souvent indispensables car ils permettent d'obtenir soit des solutions que les théories et moyens techniques ou informatiques sont impuissantes de les fournir soit des renseignements complémentaires. En outre peuvent également servir de vérifier le bien fondé, l'exactitude de solutions obtenues à partir de méthodes théorique appliquées.

IV-1. Calcul du flux de chaleur par convection forcée

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels.

$$\boldsymbol{Nu = f(Re, Pr)}$$

Définis par :

$$N_u = \frac{hd}{\lambda}$$ Nombre de Nusselt

$$R_e = \frac{\rho u d}{\mu}$$ Nombre de Reynolds

$$P_r = \frac{C_P \mu}{\lambda}$$ Nombre de Prandtl

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue de la manière suivante :

1- Calcul des nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandtl.
2- Suivant la valeur de Reynolds et la configuration $\Rightarrow$ choix de la corrélation.
3- Calcul de Nusselt Par application de cette corrélation
4- Calcul de $h = \dfrac{\lambda N_u}{d}$ et de $\varphi = hS(T_p - T_\infty)$.

IV-2. Calcul du flux de chaleur par convection libre

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels.

$$\boldsymbol{Nu = f(Gr, Pr)}$$

Définis par :

$$N_u = \frac{hd}{\lambda}$$ Nombre de Nusselt

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2}$$ Nombre de Grashof

$$P_r = \frac{C_P \mu}{\lambda}$$ Nombre de Prandtl

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection Naturelle s'effectue de la manière suivante :

1- Calcul des nombres adimensionnels de Grashof et de Prandtl.
2- Suivant la valeur de Grashof et la configuration $\Rightarrow$ choix de la corrélation.
3- Calcul de Nusselt Par application de cette corrélation
4- Calcul de $h = \dfrac{\lambda N_u}{d}$ et de $\varphi = hS(T_p - T_\infty)$.

Suivant que l'écoulement est laminaire ou turbulent, nous présentons quelques corrélations en annexe B, propre à chaque cas pour différente configuration.

****