

Annexe A

La convection et la mécanique des fluides

Quelques notions de mécanique des fluides sont nécessaires à une compréhension élémentaire du phénomène de convection à savoir

I- *Rappels des équations de conservation.*

Les équations de conservation décrivant le phénomène de convection sont :

- Equation de conservation de la masse → Équation de continuité
- Equation de conservation de la quantité de mouvement → Equation .de Naviers-Stokes
- Equation de conservation d'énergie → Equations de Fourier - Kirehhoff

II-1- *Equation de continuité.*

Cet équation est établi en écrivant la conservation de la masse sur un élément de volume dV traversé par un fluide.

$$\left[\begin{array}{c} \text{accumulation de} \\ \text{la masse} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{quantité de masse} \\ \text{entrante} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{quantité de masse} \\ \text{sortante} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} dV \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho v_x \Big|_x dydz - \rho v_x \Big|_{x+dx} dydz \\ &+ \rho v_y \Big|_y dx dz - \rho v_y \Big|_{y+dy} dx dz \\ &+ \rho v_z \Big|_z dx dy - \rho v_z \Big|_{z+dz} dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

En divisant par $dV = dx dy dz$ et on prend la limite quand $dV \rightarrow 0$,
On obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right]$$

Qu'on peut écrire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \quad (2)$$

ou encore

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (3)$$

avec $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ Dérivée particulaire

II-2- Equation de conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement sur l'élément de volume élémentaire $dV=dx dy dz$ est :

$$\left[\begin{array}{l} \text{accumulation de} \\ \text{la quantité de mvt} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{quantité de mvt} \\ \text{entrante} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{quantité de mvt} \\ \text{sortante} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{action des forces extérieures} \\ \text{volumique et surfaciques} \end{array} \right]$$

Même démarche que précédemment, on obtient :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \tau + \rho \vec{g} \quad (4)$$

Avec

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} : \text{Forces d'inertie}$$

$$\vec{\nabla} p : \text{Forces de pression}$$

$$\vec{\nabla} \tau : \text{Forces de viscosité}$$

$$\rho \vec{g} : \text{Forces de gravité}$$

avec les hypothèses : $\rho = \text{cste}$ fluide incompressible.

et $\mu = \text{cste}$

L'équation (4) devient

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \rho \vec{g} \quad (5)$$

Rappel : on peut aboutir aux mêmes résultats en utilisant

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{D}{Dt} (m\vec{V}) \quad 2^{ième} \text{ loi de Newton}$$

- forces de surface : normale \rightarrow pression

Tangentielles \rightarrow viscosité

- forces volumiques : généralement des forces de gravité

II-3- Equation de conservation d'énergie

Pour évaluer la quantité de chaleur transmise par convection on doit établir l'équation qui régit la répartition des températures dans le fluide, celle-ci est obtenue par application du 1^{er} principe de la thermodynamique au volume fluide considéré. Comme il s'agit d'un fluide en mouvement, l'énergie emmagasinée dans les particules fluides est transportée par leur mouvement. La quantité transportée dépend de la vitesse des particules fluides. Il faut donc résoudre le problème de la mécanique des fluides (résoudre l'équation de la quantité de mouvement).

$$\Delta E_T = \Delta W + \Delta Q \quad 1^{er} \text{ Principe de la thermodynamique} \quad (6)$$

Soit un domaine fluide D limité par une surface S. On suit D dans son mouvement

Le 1^{er} principe de la thermodynamique s'écrit pour D entre l'instant t et t+dt comme suit:

$$dE_T = \delta W + \delta Q$$

avec $E_T = U + E_C$, sont respectivement énergie interne et énergie cinétique

- La variation d'énergie totale pendant dt est :

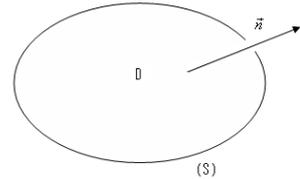
$$\frac{d}{dt} \int_D (U + E_C) \rho dv . dt = \int_D \frac{d}{dt} (U + E_C) \rho dv dt \quad (7)$$

- **La quantité de chaleur échangée est:**

$$\Delta Q = \left[- \int_S \vec{\varphi} . \vec{n} ds + \int_D q dv \right] dt$$

* $\vec{\varphi}$: flux de chaleur traversant la surface S par conduction d'après la loi de Fourier $\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$, T: température du milieu fluide.

*q : quantité de chaleur produite à l'intérieur du domaine fluide (source, puit)



$$\begin{aligned} \Delta Q &= - \int_D (\text{div} \vec{\varphi} - q) dV dt \\ &= \int_D (\text{div} \lambda \overrightarrow{\text{grad}T} + q) dV dt \end{aligned} \quad (8)$$

- **Travaux des forces extérieures**

$$\Delta W = \Delta W_s + \Delta W_m$$

$$* \Delta W_s : \text{Travaux des Forces de surface} = \int_S \vec{T} dS . \vec{U} dt$$

$$* \Delta W_m : \text{Travaux des forces volumique par unité de masse} = \int_D \vec{F}_{ext} . \vec{U} dt \rho dV$$

C'est-à-dire,

$$\Delta W = \int_S \vec{T} dS . \vec{U} dt + \int_D \vec{F}_{ext} . \vec{U} dt \rho dV \quad (9)$$

\vec{T} : force par unité de surface (Tenseur des contraintes)

avec les composantes du tenseur $T_i = \sigma_{ij} \eta_j$ (notation d'après la convention d'Einstein)

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} - \frac{2}{3} \mu \text{div} \vec{u} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Compte tenu des équations (7), (8) et (9) l'équation d'énergie s'écrit :

$$\int_D \frac{d}{dt} (U + E_C) \rho dV dt = \int_S \sigma_{ij} n_j U_i dS dt + \int_D \rho F_i U_i dV dt$$

$$+ \int_D (\operatorname{div} \lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T + q) dV dt \quad (10)$$

pour une écriture simple de l'équation (10) on utilise l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous la forme :

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (11)$$

(Application du théorème de l'énergie cinétique)

En multipliant l'équation (11) par U_i et on l'intègre sur le domaine D on obtient :

$$\int_D \rho U_i \frac{dU_i}{dt} dV = \int_D \rho U_i F_i dV + \int_D U_i \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV$$

Que nous pouvons écrire encore

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \frac{d\vec{U}^2}{dt} \rho dV &= \int_D \rho U_i F_i dV + \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i \sigma_{ij}) dV - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \\ &= \int_D \rho U_i F_i dV + \int_S U_i \sigma_{ij} \eta_j dS - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \\ &= \Delta W_m / dt + \Delta W_s / dt - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \end{aligned}$$

En introduisant cette équation dans l'équation d'énergie (10) on obtient :

$$\int_D \frac{d}{dt} (U) \rho dV = \int_D (\operatorname{div} \lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T + q) dV + \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \quad (12)$$

Relation valable quelque soit D, donc

$$\rho \frac{dU}{dt} = \operatorname{div} \lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T + q + \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (13)$$

avec

$$\sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -p \operatorname{div} \vec{U} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{U})^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (14)$$

* $-p \operatorname{div} \vec{U}$: effet de la force de pression processus réversible

* $\phi = -\frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{U})^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$: fonction de dissipation processus irréversible.

(Frottement visqueux au sein du fluide c'est une dégradation de l'énergie cinétique en chaleur).

Pour un fluide incompressible ($\rho = cste$) $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{U} = 0$ et compte tenu de (14) l'équation d'énergie (13) devient :

$$\rho \frac{dU}{dt} = \operatorname{div} \lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T + q + 2\mu \varepsilon_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (15)$$

Soit $H = U + \frac{P}{\rho}$ fonction enthalpie de l'unité de masse

$$U = H - \frac{P}{\rho}$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho \frac{dH}{dt} - \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right)$$

En reportant ce résultat dans l'équation (15) on obtient :

$$\rho \frac{dH}{dt} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}) + q + \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right] + 2\mu \varepsilon_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (16)$$

pour un fluide incompressible ($\rho = \text{cste}$), $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \text{div}\vec{U} = 0$ et l'équation (16) devient :

$$\rho \frac{dH}{dt} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}) + q + \frac{dP}{dt} + 2\mu \varepsilon_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

La thermodynamique fournit les relations suivantes :

$$H = H(P, T) \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T \frac{dP}{dt}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = Cp \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad \text{Relation de Maxwell}$$

Avec $\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$ coefficient de dilatation volumique à pression constante.

La dérivée de H par rapport à la pression devient : $\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} (1 - \beta T)$

Finalement l'équation (16) s'écrit :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}) + \beta T \frac{dP}{dt} + q + \phi \quad (17)$$

Si $\mu = \text{cste}$, $\lambda = \text{cste}$, $\rho = \text{cste}$ le fluide est Newtonien, et $q = 0$ (sans source de chaleur)

L'équation de conservation d'énergie s'écrit dans ce cas :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T = a \Delta T \quad (18)$$

avec $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ diffusivité Thermique

Les autres équations de conservations deviennent :

Equation de continuité

$$\text{div}\vec{U} = 0 \quad (19)$$

Équation de Navier Stokes

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \mu \Delta U_i \quad (20)$$

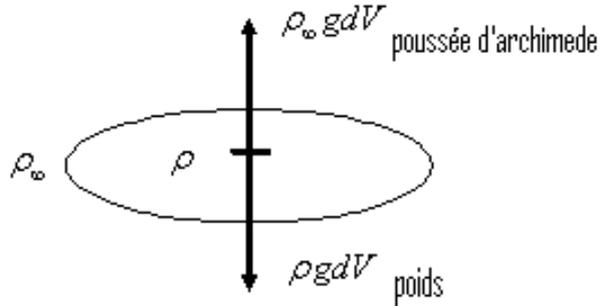
avec $P^* = P + \rho g x_i \delta_{iz}$

En présence de la convection libre la densité du fluide devient une fonction de la température $\rho = \rho(T)$, une particule fluide de volume dV dans un domaine fluide D est soumise aux forces suivantes :

- le poids $\rho g dV$
- la poussée d'Archimède $\rho_\infty g dV$

dont la résultante est

$$F = (\rho_\infty - \rho) g dV$$



Dans le cadre de l'approximation de BOUSSENESQ $\rho = cst = \rho_\infty$ sauf dans le terme $\rho g \Delta V$ (poids du fluide), les équations de conservation s'écrivent :

- continuité

$$\text{div} \vec{u} = 0 \tag{21}$$

- équation de Navier-stokes

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} g \delta_{iz} + \nu \Delta U_i \tag{22}$$

- équation de l'énergie

$$\frac{dT}{dt} = a \Delta T \tag{23}$$

- lorsque $\lambda, \rho, Cp = cste \Rightarrow$ équation de l'énergie est linéaire.
- Si le fluide est au repos (en équilibre dynamique) \Rightarrow équation de Fourier pour l'équation d'énergie (conduction pur)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho Cp} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right) + q \tag{24}$$

II- La convection et la mécanique des fluides :

- notions sur la turbulence
- notions sur la couche limite

II-1 : La turbulence

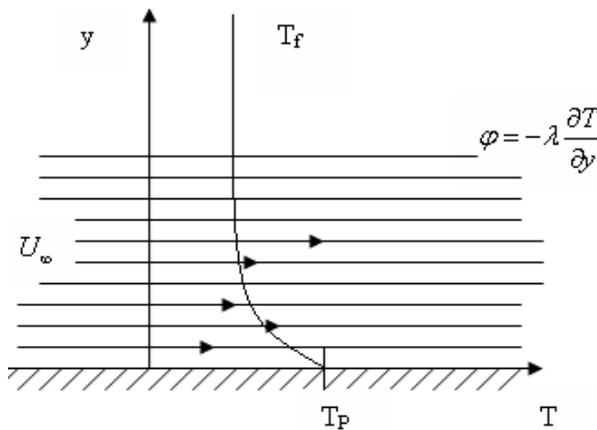
On a dit que le transfert de chaleur par convection est intimement lié au mouvement du fluide, un des aspects les plus importants de l'étude hydrodynamique est d'établir si le mouvement du fluide est Laminaire ou Turbulent.

Dans un écoulement laminaire, le fluide s'écoule par couches, chaque particule de fluide suit une ligne unie et continue (voir cours de mécanique des fluides).

A l'opposé de ce mouvement ordonné de l'écoulement laminaire, le mouvement des particules fluides dans un écoulement turbulent est complètement désordonné, la trajectoire de toute particule individuelle est irrégulière, mais sur une base statistique le mouvement globale de l'ensemble des particules fluides est régulier.

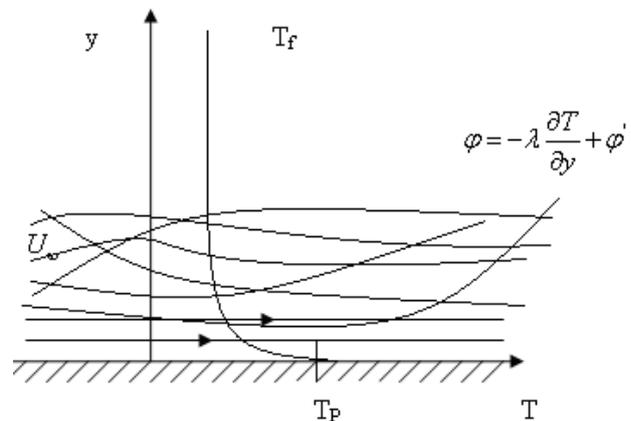
C'est à dire : $\vec{U} = \bar{\vec{u}} + \vec{u}'$ avec $\overline{\vec{u}'} = 0$

\vec{u}' C'est une fonction du temps, joue un rôle fondamentale dans la transmission de la chaleur, le mécanisme de conduction est modifié et favorisé par d'innombrables tourbillons qui transportent la masse du fluide à travers les filets fluides. Ces particules fluides en se mélangeant à d'autres particules jouent le rôle de porteurs d'énergie ce qui entraîne un accroissement de quantité de chaleur transportée.



Écoulement Laminaire

- filets fluides sont parallèles
- les échanges sont d'origine moléculaire.
- si les conditions aux limites sont permanentes les composantes de la vitesse U_i , P , T et ρ sont indépendantes du temps



Écoulement Turbulent

- on ne peut plus parler de filets fluides
- le mouvement des particules fluides est Aléatoire
- la diffusion transversale est très importante.
- si les conditions aux limites sont permanentes, on dit que U , P , T et ρ sont permanent en moyenne

II-2 : Couche limite :

Lorsqu'un fluide s'écoule le long d'une surface, indépendamment de la nature de l'écoulement les particules à proximité de la surface sont ralenties en vertu des forces de viscosité, les particules fluides adjacentes à la surface y adhèrent et on a une vitesse nulle par rapport à la paroi. Les autres particules fluides s'efforçant de glisser sur les premières sont ralenties par suite de l'interaction entre mouvement accéléré et retardé du fluide, phénomène qui donne naissance aux forces de cisaillement.

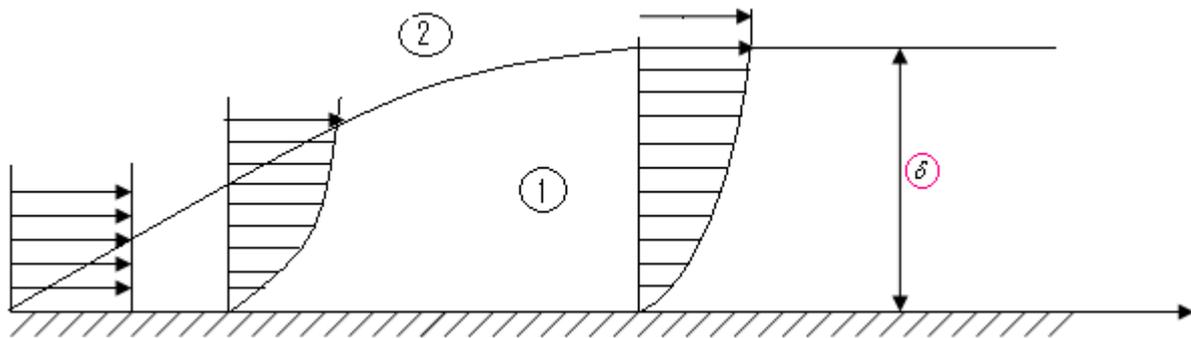
- Dans l'écoulement laminaire l'interaction appelée cisaillement visqueux s'effectue entre les molécules à une échelle microscopique.
- Dans l'écoulement turbulent une interaction entre masse fluide à une échelle macroscopique, appelée cisaillement turbulent, se superpose au cisaillement visqueux.

Les effets des forces de viscosité qui prennent naissance à la paroi s'étendent dans la masse fluide, mais à faible distance de la paroi, la vitesse des particules fluides atteint celle de l'écoulement libre.

La région dans laquelle sont localisées les variations notables de la vitesse est appelée *couche limite hydrodynamique* dont l'épaisseur est défini par :

$$\delta \rightarrow U = 0,99U_{\infty}$$

L'écoulement sur une surface solide peut être divisé en deux zones.

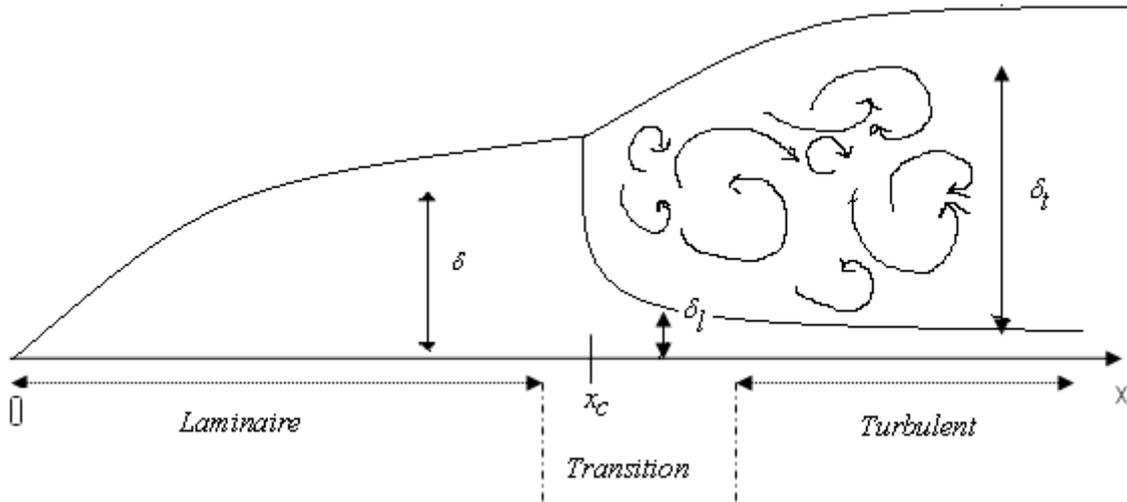


1/ Une zone où les effets visqueux jouent un rôle important, elle est mince et adjacente aux surfaces solides \Rightarrow couche limite ($\frac{\partial U}{\partial \eta}$ est grande, forces de viscosité importantes).

2/ Une zone, à l'extérieur de cette couche limite où l'écoulement peut être considéré comme celui d'un fluide idéal, où les effets visqueux sont négligeables \Rightarrow résolution des équations Navier Stokes en fluide parfait.

Pour le thermicien, la transmission de la chaleur étant localisée essentiellement dans la couche limite, par conséquent la théorie du fluide parfait ne présente aucun intérêt.

L'écoulement à l'intérieur de la couche limite reste laminaire seulement sur une certaine distance x à partir du bord d'attaque et devient en suite turbulent, à l'intérieur de la couche limite turbulente, il subsiste une très couche mince laminaire.



Le fluide poursuit son écoulement le long de la plaque, les forces de cisaillement ralentissent de plus en plus son mouvement, l'épaisseur de la couche limite δ augmente, la transition au turbulent se produit en x .

On note :

$$Re_c = \frac{U_\infty x_c}{\nu} \quad \text{Nombre de Re critique. Fonction (turbulence amont, rugosité)}$$

Après la transition δ augment rapidement mais subsiste une sous couche laminaire δ_l .

$$\frac{\delta_l}{x} = 72,94 Re_x^{-0,9} \quad \text{Corrélation expérimentale} \quad (25)$$

Les forces de frottement ainsi que le transfert de chaleur sont régis dans la couche limite laminaire ou turbulente par des relations différentes.

$$h = f\left(\frac{1}{\delta_l}\right) \quad \text{Coefficient de transfert de chaleur.}$$
