UNIVERSITÉ ABDEL MALEK ESSAADI
Faculté des Sciences B.P 2121 Tétouan
Département de Physique

Licence Fondamentale « Parcours ÉNERGÉTIQUE»

Notes de cours :

Transfert de chaleur

Partie : CONVECTION

Pr. B. KHARBOUCH
2018/19

TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

- ***Généralités sur la convection :***

Les transferts thermiques font partie des Sciences de base, peu de domaines industriels où la thermique ne joue un rôle petit ou grand. Le chercheur, au minimum, doit donc en connaître les principes fondamentaux, être capable d'évaluer leur importance dans un problème particulier et dégager les ordres de grandeur par une modélisation simple.

Les transferts de chaleur qui s'effectuent simultanément avec des transferts de masse sont dits transferts de chaleur par convection. Ce mode d'échange de chaleur existe au sein des milieux fluides dans lesquels il est généralement prépondérant.
La convection est un mode de transfert de chaleur où celle-ci est advectée (transportée, conduite) par au moins un fluide. Selon la nature du mécanisme qui provoque le mouvement du fluide on distingue :

- La convection libre ou naturelle
- La convection forcée

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi

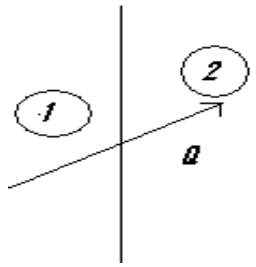
I - Introduction

L'habitude didactique fait que l'on distingue trois modes de transmission de chaleur entre deux milieux différents (1) et (2) en interaction

- la conduction
- le rayonnement
- la convection.

Dans la pratique ces trois modes sont présents en même temps , interférent entre eux, et ce n'est que pour certains cas particuliers que l'on peut faire l'étude de l'un , pris isolément.

II - Rappel sur la définition des trois modes de transfert



On désigne par :

* ***Q*** : quantité de chaleur transmise entre les milieux 1 et 2 en (J)

* $\dot{Q}$: la puissance thermique correspondante (W : Watt)

* φ : la densité de flux (W/m^2)

Application du premier principe de la thermodynamique $\Rightarrow$ la quantité d'énergie totale échangée se conserve.

Application du deuxième principe $\Rightarrow$conduit à orienter le flux de la quantité *Q* des températures les plus élevées (T_1) vers les plus basses T_2 ($T_1 > T_2$) (sens des échanges de chaleur.

a- Conduction

La conduction est interne aux milieux (1) et (2) mis en contact avec des sources de chaleur extérieures. L'écoulement de chaleur est caractérisé par la loi phénoménologique de Fourier suivante :

Le flux de chaleur par conduction est donné par :

$$\Phi = -\lambda S \vec{\nabla} T.\vec{n}$$

avec $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ désigne le vecteur gradient, $\vec{n}$: désigne la normale à S

La densité de flux de chaleur à la section de passage est donnée par.

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = -\lambda \vec{\nabla} T.\vec{n}$$

b- *Rayonnement*

Échange réciproque avec émission et absorption des photons par les surfaces des milieux (1) et (2) que ne sont pas forcément en contact. La loi fondamentale qui régit l'échange de chaleur par rayonnement est :

$$\dot{Q} = \sigma S (T_1^4 - T_2^4)$$

T1>T2 pour 2 surfaces S supposées noires dans une configuration de facteur de forme égale à 1

c- Convection

Se produit lorsqu'il existe entre les milieux (1) et (2) une vitesse relative macroscopique non nulle : $\overrightarrow{V_r}$ et un gradient de température. Le phénomène de transfert de chaleur résulte du couplage entre les échanges conductifs, radiatifs et le transfert par la matière en écoulement relatif.

Le transfert de chaleur par convection est donc intimement lié aux caractéristiques de l'écoulement du fluide. *La connaissance préalable de notions élémentaires de mécanique des fluides est donc un pré requis indispensable*.

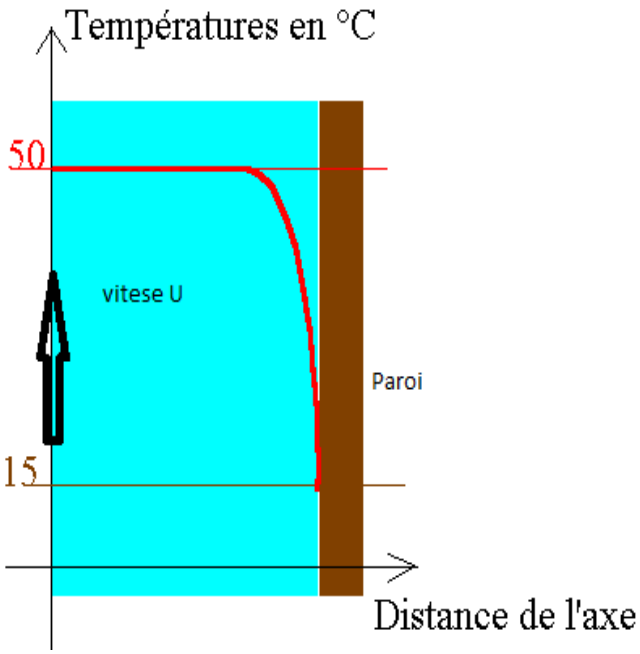
La convection n'introduit rien de fondamentalement différent de ce que l'on connaît déjà, grâce à la conduction et à la mécanique des fluides. La mécanique des fluides permet le calcule du champ de vitesse de fluide, auquel se superpose un problème de conduction dans un milieu déformable.

La convection, n'est donc, que la conduction dans un fluide déformable. Dans la pratique le milieu (1) est souvent un solide le milieu (2) est un fluide.

Le mouvement du fluide peut être dû à un des deux causes suivantes, ce qui conduit à la définition de deux modes de convection.

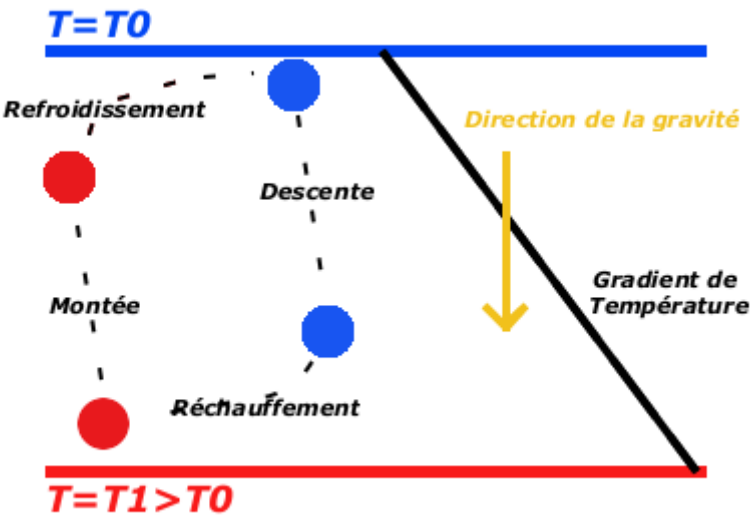
- ***Convection forcée*** : Le mouvement du fluide est imposé par une source extérieure d'énergie telle que pompe, etc.

Principe physique



Exemple:
Le tuyau transporte de l'eau à la température moyenne:
$T_m = 50\ °C$
alors que la paroi est à la température:
$T_p = 15\ °C$

- ***Convection libre ou naturelle*** : Le mouvement du fluide est dû au phénomène de transmission de chaleur lui même. Les gradients de température créent des gradients de masses volumiques et par conséquent un mouvement du fluide.



Principe physique

II - Expression du flux de chaleur par convection

On considère R résistance thermique équivalente à celle que le flux de chaleur rencontrerait en conduction à travers une paroi dont l'épaisseur serait celle du film (laminaire).

$$R = \frac{e}{\lambda}$$

e: épaisseur du film

λ : Conductivité thermique du fluide

Rigoureusement, le flux de chaleur par unité de surface (densité de flux de chaleur) s'écrit :

$$\varphi = \frac{\lambda}{e}(T_p - T_i)$$

T_p: température de paroi solide

T_i : température à la limite du film laminaire.

Pour un régime bien établi, on peut considérer que la température du fluide au delà du fluide laminaire est T_∞ et on prend comme densité de flux de chaleur

$$\varphi = \frac{\lambda}{e}(T_p - T_\infty) \quad W/m^2$$

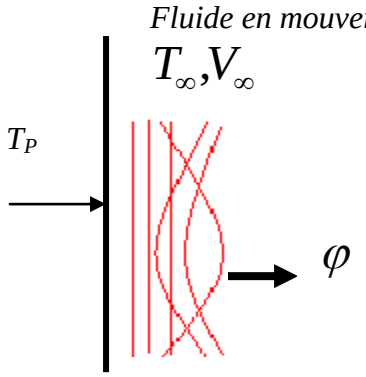
T_∞ : Température du fluide loin de la paroi.

Tp: température de paroi solide

Cette loi simple, présente une énorme difficulté dans son application puisqu'on ne connaît pas l'épaisseur e du film laminaire. C'est ce qui amène à défini un coefficient de transfert de chaleur superficiel du coefficient de transfert de chaleur par convection par :

$$h = \frac{\lambda}{e} \quad W\,m^{-2}\,{}^0C^{-1}$$

Quelque soit le type de convection (libre ou forcée) et quelque soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent). La densité flux de chaleur φ est donnée par la loi de Newton



$$\varphi = h.(T_p - T_\infty)$$

Avec

φ	Densité de flux de chaleur transmis par convection	(Watt/m^2)
h	Coefficient de transfert de chaleur par convection	W m^{-2} °C^{-1}
T_P	Température de la surface du solide	°C

T_∞	Température du fluide loin de la surface du solide	°C
V_∞	Vitesse du fluide loin de la paroi	m/s
S	Aire de la surface de contact solide/fluide	m^2

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer ***h*** qui dépend d'un nombre important de paramètres : Caractéristiques du fluide, de l'écoulement, de la différence de température, de la forme de la surface d'échange.

Exemple: ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection ***h***

Convection Naturelle

Dans un gaz $2 \rightarrow 10\ W m^{-2}{}^0C^{-1}$

Dans un liquide $100 \rightarrow 1000\ W m^{-2}{}^0C^{-1}$

Convection forcée

Dans un gaz $10 \rightarrow 200\ W m^{-2}{}^0C^{-1}$

Dans un liquide $100 \rightarrow 50000\ W m^{-2}{}^0C^{-1}$

Le coefficient d'échange de chaleur par convection h est une fonction complexe de l'écoulement du fluide des propriétés thermiques du milieu fluide et de la géométrie du système.

III-Le nombre de Nusselt

Lorsque la vitesse du fluide est faible, le transport d'énergie n'est que faiblement aidé par les courants de mélange à échelle macroscopique. Au voisinage immédiat de la paroi la chaleur se meut par conduction pure, les molécules du fluide étant stationnaires par rapport à la frontière de la couche limite.

Comme à l'interface (y=0) la chaleur s'écoule seulement par conduction, la densité de flux de chaleur peut être calculée à partir de l'équation

$$\varphi = -\lambda \vec{\nabla} T . \vec{n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\Big)_{y=0}$$

On peut établir une relation entre le coefficient d'échange de chaleur, h, et le gradient de température à la paroi en écrivant :

$$Q = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial y}\Big)_{y=0} = hS(T_p - T_\infty)$$

Q : quantité de chaleur transmise entre les milieux 1 et 2 en (J)

S : surface d'échange de chaleur.

A partir de l'égalité ci-dessus on peut calculer le rapport suivant :

$$\frac{hS}{\lambda S} = \frac{-\frac{\partial T}{\partial y}\Big)_{y=0}}{(T_p - T_\infty)}$$

En introduit une longueur L (S=L*L) caractéristique du corps à, partir duquel la chaleur se transmet, l'équation ci-dessus se met sous la forme suivante :

$$\frac{hS}{\lambda S}=\frac{-\frac{\partial T}{\partial y}\Big)_{y=0}}{(T_p-T_\infty)} \quad \Rightarrow \quad \frac{hL}{\lambda L}=\frac{-\frac{\partial T}{\partial y}\Big)_{y=0}}{(T_p-T_\infty)} \quad \Rightarrow \quad \frac{hL}{\lambda}=\frac{-\frac{\partial T}{\partial y}\Big)_{y=0}}{\frac{(T_p-T_\infty)}{L}}=Nu$$

Le rapport $\frac{hL}{\lambda}$ est appelé **nombre de Nusselt *Nu***. Nusselt peut être interprété physiquement comme étant le rapport du gradient de température dans le fluide en contact immédiat avec la surface solide sur le gradient de température de référence $\frac{(T_p-T_\infty)}{L}$. En pratique, le nombre de Nusselt est une mesure commode du coefficient d'échange de chaleur par convection car, une fois sa valeur connue, on peut calculer le coefficient d'échange de chaleur par:

$$h=Nu\frac{\lambda}{L}$$

III - Évaluation des coefficients d'échange de chaleur par convection

Il existe quatre méthodes générales pour déterminer les coefficients d'échange de chaleur par convection

- Résolution analytique ou numérique des équations du mouvement
- Études approchées de la couche limite par les méthodes d'intégrations
- Analyse dimensionnelle combinée avec l'expérience
- L'analogie entre le transfert de chaleur, de masse et de quantité de mouvement.

On s'intéresse dans la suite de ce cours à la méthode d'analyse dimensionnelle

IV - Analyse dimensionnelle.

1- Remarques

La complexité des phénomènes de convection rend nécessaire l'utilisation de techniques générales qui permettent de limiter le nombre des paramètres d'un problème. Ces techniques sont l'analyse dimensionnelle et la similitude.

Le but commun de l'analyse dimensionnelle et la similitude est de déterminer, à partir des grandeurs physiques dimensionnelles qui interviennent, un plus petit nombre de groupements sans dimension.

Pour appliquer les méthodes de l'analyse dimensionnelle, il suffit de connaître toutes les grandeurs physiques intervenant, ainsi que leur dimension. Par contre les méthodes de similitude imposent la connaissance des équations régissant le phénomène

Décrire un phénomène physique revient, d'une façon générale à établir un ou plusieurs relations liant des grandeurs physiques qui décrivent le phénomène physique concerné.

L'analyse dimensionnelle diffère des autres méthodes d'approche par le fait qu'elle ne donne pas d'équations pouvant être résolues, et ce qui la limite c'est le fait qu'elle ne donne pas d'informations au sujet de la nature du phénomène. Aussi pour appliquer l'analyse dimensionnelle il est indispensable de connaître au préalable les variables qui influencent le phénomène ce qui nécessite une expérience.

2 - Principe **:**

L'analyse dimensionnelle nécessite des calculs mathématiques simples, son champ d'application est le plus vaste. Pour appliquer l'analyse dimensionnelle il est indispensable de connaître au préalable les variables qui influencent le phénomène, et le succès ou l'échec de la méthode dépend du choix approprié de ces variables.

Tout phénomène est fonction d'un certain nombre de grandeurs $(E_1, E_2, E_3, ..., E_p)$ indépendantes ou liées. *Établir une loi physique consiste à chercher une relation mathématique entre les différentes variables* $E_1, E_2, ...E_p$ *intervenant dans le phénomène,* si la relation existe, elle peut s'exprimer sous la forme :

$$f(E_1, E_2, E_3, ..., E_p) = 0$$

Qui est la forme la plus générale de n'importe quelle équation physique complète à l'équilibre du système.

Le phénomène est indépendant des unités choisies pour les différentes grandeurs. Il doit être de même pour la relation *f.*

L'application de l'analyse dimensionnelle permet de transformer

$$f(E_1, E_2, E_3, ..., E_p) = 0 \qquad en \qquad F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...) = 0$$

$E_1, E_2, E_3 ... E_p$ Variables avec dimension.

$\pi_1, \pi_2, \pi_3 ...$ Nombres ou groupements sans dimension.

Pour établir l'expression des nombres sans dimension figurants dans *F* on peut utiliser une des deux méthodes suivantes :

- l'application du théorème des π de Buckingham.
-La normalisation des équations différentielles décrivant le phénomène physique.

Les deux méthodes conduisent évidemment aux mêmes résultats, la seconde méthode exige de connaître des équations du phénomène physique, tandis que la première n'exige que la connaissance de tous les paramètres qui ont une influence sur le phénomène physique.

2-1 : Théorème π de Vaschy-Bulkingham (1890-1915)

Le théorème de Vaschy-Buckingham permet de prévoir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant le phénomène étudié s'écrira:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ..., \pi_{p-q}) = 0$$

où les π_i sont des groupements sans dimension.

D'après ce théorème, le nombre des groupes indépendants adimensionnels qui peut être formé par la combinaison des variables physiques $E_1, E_2 ... E_p$ du problème donné, est égal au nombre total de ces quantités physiques p diminué du nombre des dimensions fondamentales q nécessaires pour exprimer les formules dimensionnelles des p quantités physiques.
Si $\pi_1, \pi_2 \ldots$, sont les groupements sans dimension, alors leur nombre est donné par :

Nombre = p – q groupements.

p : nombre total des quantités physiques.
q : nombre des dimensions fondamentales

L'équation qui exprime la relation entre les différents groupements sans dimension est donnée par :

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ..., \pi_{p-q}) = 0$$

<u>la première étape</u> consiste à choisir un système de dimensions fondamentales. Ce choix est arbitraire, mais les formules dimensionnelles de toutes les variables appropriées $E_1, E_2, \ldots$ doivent être exprimées en fonction des dimensions fondamentales, dans le système international, Celles-ci sont :

La longueur	L
Le temps	T
La température	θ
La masse	M

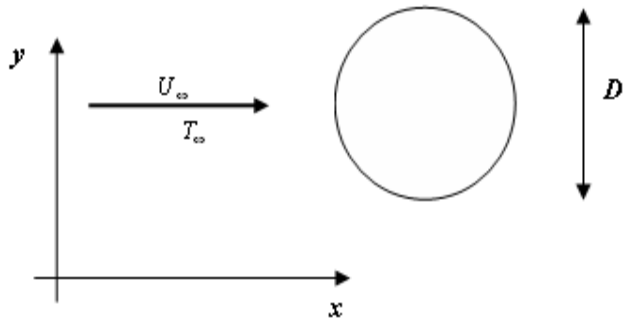
La formule dimensionnelle d'une grandeur physique découle des définitions et des lois physiques.

Exemple : La longueur d'une barre $\rightarrow [L]$

La vitesse d'une particule fluide $\rightarrow [L]/[T] = \left[LT^{-1}\right]$

La deuxième étape : détermination des groupements adimensionnels.
On se propose de déterminer les groupements adimensionnels dans les cas suivants :

2-1-1) ***1er cas : Convection forcée.***
Étude de l'échange de chaleur par convection forcée entre un cylindre infiniment long chauffé par un fluide arrivant perpendiculairement à son axe et à vitesse constante :



Ecoulement autour d'un cylindre

A partir de la description du processus de la transmission de chaleur par convection, il est raisonnable d'admettre que les quantités physiques considérées dans le tableau ci-dessous sont approprié au problème posé :

Grandeurs physiques	**Symbole**	**Unités** *SI*	**Equations aux Dimensions**
- Diamètre du tube	D	m	$[L]$
- Vitesse du fluide	U_∞	m/s	$[LT^{-1}]$
- Masse volumique du fluide	ρ	Kg/m^3	$[ML^{-3}]$
- Viscosité dynamique du fluide	μ	Kg/(m.s)	$[ML^{-1}T^{-1}]$
- Conductance thermique du fluide	λ	W/(m °c)	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$
-Capacité calorifique du fluide à pression constante.	C_P	J/(Kg °c)	$[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$
- Coefficient d'échange de chaleur	h	W/(m^2 °c)	$[MT^{-3}\theta^{-1}]$
- Ecart des températures extrêmes	$T_p - T_\infty$	°c	$[\theta]$

C'est à dire la relation physique à rechercher entre les différentes variables $D, U_\infty, \rho, \mu, \lambda, C_P, h, T_p - T_\infty$ intervenant dans le phénomène est :

$$f(D, U_\infty, \rho, \mu, \lambda, C_P, h, T_p - T_\infty) = o$$

on a donc p = 8 grandeurs physiques
q = 4 dimensions fondamentales L, M, T, θ
on conclut donc, que nous aurons 8 - 4 = 4 groupements adimensionnels à rechercher.

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = o$$

Pour trouver ces groupements, on écrit π sous la forme d'un produit de variables chacun ayant un exposant inconnu.

$$\pi = D^a \,.\, \lambda^b . U_\infty^c . \rho^d \,.\, \mu^e . c_p^f . h^g . (T_p - T_\infty)^i$$

Ce qui correspond à l'équation en dimension suivante pour π:

$$[\pi] = [L]^a . \left[MLT^{-3}\theta^{-1}\right]^b . \left[LT^{-1}\right]^c . \left[ML^{-3}\right]^d . \left[ML^{-1}T^{-1}\right]^e . \left[M^2T^{-2}\theta^{-1}\right]^f . \left[MT^{-3}\theta^{-1}\right]^g . [\theta]^i$$

ou encore

$$[\pi] = [M]^{b+d+e+g} . [L]^{a+b+c-3d-e+2f} . [T]^{-3b-c-e-2f-3g} . [\theta]^{-b-f-g+i} .$$

le groupement π doit être sans dimension, c'est à dire

$$\begin{aligned} &b + d + e + g = o \\ &a + b + c + -3d - e + 2f = o \\ &3b - c - e - 2f - 3g = o \\ &b - f - g + i = o \end{aligned}$$

C'est un système de 4 équations à 8 inconnus *a, b, c, d, e, f, g, i* de point de vue mathématique 4 des 8 inconnus peuvent être choisit arbitrairement, la seule restriction concernant ce choix est que chaque exposant choisi doit être indépendant des autres. Un exposant est indépendant si le déterminent formé par les coefficients des termes restant n'est pas nul.

Avec un peut de chance et de sens physique on arrive à résoudre ce système, en adoptant la démarche suivante :

* comme il s'agit de déterminer l'expression du coefficient d'échange de chaleur par convection ***h***, il est commode de poser son exposant g = 1 et en même temps on admet que *c = d = i = o*.
par résolution du système d'équations ci-dessus d'après ce choix on obtient :

a = 1, *b = -1,* *e = f = o*

donc $\pi_1 = \dfrac{h D}{\lambda} = Nu$ appelé nombre de Nusselt.

C'est le premier groupement adimensionnel avec le choix *g = 1*.

* On choisit *g = o* (la variable h figure dans un nombre sans dimension ce qui rend légitime ce choix) on admet que *a = 1 et f = i = o*. Par résolution du système, on obtient :

b = o, *c = d = 1,* *e = -1*

Soit $\pi_2 = \dfrac{\rho U_\infty D}{\mu} = \mathrm{Re}$ c'est le nombre de Reynolds.

* On choisit *c = g = e = i = o; par* résolution du système d'équations ci-dessus on obtient :

$$a = d = o \quad et \quad f = 1$$

Soit $\pi_3 = \frac{\mu Cp}{\lambda} = Pr$ c'est le nombre de Prandtl.

* On choisit a = *b = d = e = o ;* par résolution du système, on obtient :

$$g = o, \quad c = 2, \quad i = 1, \quad f = -1$$

Soit $\pi_4 = \frac{U_\infty^2}{Cp\,\Delta T} = Ec$ c'est le nombre d'Eckert.

L'équation donnant les groupements adimensionnels s'écrit alors

$$F(Nu, Re, Pr, Ec) = o$$

ou encore

$$\boldsymbol{Nu = f(Re, Pr, Ec)}$$

Le Nombre d'Eckert il n'intervient que dans la description d'écoulements proches de la vitesse du son.

L'importance de cette réduction de variables apparaît lorsqu'on cherche une corrélation entre les données expérimentales.

2-1-2) ***2^{ième} cas : Convection Naturelle (libre)***

Étude de l'échange de chaleur par convection naturelle autour d'un cylindre horizontal chauffé uniformément.

On considère un fluide au repos à la température To dans lequel on place un cylindre horizontal chauffé uniformément à la température T_P.

Hypothèses :

- propriétés physique : λ, μ, c sont supposées uniformes.
- On admet que $\rho = cst = \rho_o$ est uniforme, sauf dans les termes expriment les forces de gravité (approximation de Boussenesq).

$$\rho = \rho_o(1 + \beta(T - T_o))$$

$\beta = \frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial T})_P = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial T})_P$ Coefficient de dilatation volumique à pression constante.

En convection libre ce sont les différences de masse volumique dans le fluide qui sont à l'origine de son mouvement. Une particule fluide de masse volumique ρ et de volume dv située au voisinage d'une paroi chaude sera soumise aux forces suivantes :

- poids ρ g d v
- poussée d'Archimède ρ_0 g d v

La résultante des forces s'exerçant verticalement sur la particule est donnée par :

$F = (\rho_o - \rho) g\, dV \quad ou \quad f = \frac{\rho_o - \rho}{\rho} g$ Force par unité de masse

D'après l'hypothèse de Boussenesq $\rho_o - \rho << \rho_o \Rightarrow f = \frac{\rho_o - \rho}{\rho_o} g$ c'est à dire $\rho \square \rho_0$

En utilisant la relation donnant la densité, on a :

$$\frac{\rho - \rho_o}{\rho_0} = \beta(T - T_o) \quad et \quad f = \beta g(T - T_o)$$

D'après la relation établie ci-dessus, il y a couplage entre les champs de vitesse et de températures par l'intermédiaire du terme $\beta g(T - T_o)$. Finalement, pour l'étude de l'échange de chaleur par convection naturelle, les variables physiques appropriées sont $(l,\ \nu = \frac{\mu}{\rho},\ \beta g,\ T - T_o,\ a,\ \lambda,\ \varphi)$.

Symbole	**Grandeurs**	**Unités** *SI*	**Équations aux dimensions**
- ℓ	Longueur	m	$[L]$
- υ	Viscosité cinématique	m^2/s	$\left[L^2T^{-1}\right]$
- β	Coefficient de dilatation	$1/°c$	$\left[\theta^{-1}\right]$
- G	Accélération	m/s^2	$\left[LT^{-2}\right]$
- $T - T_o$	Différence de température = ΔT_o	°c	$[\theta]$
$a = \lambda / \rho C_P$	Diffusivité thermique	m^2/s	$\left[L^2T^{-1}\right]$
- λ	Conductivité thermique du fluide	w/m °c	$\left[MLT^{-3}\theta^{-1}\right]$
- φ	Flux de chaleur $\varphi = h(T - T_o)$	w/m^2	$\left[MT^{-3}\right]$

C'est à dire $f(l, \nu, \beta g, T - T_o, a, \lambda, \varphi) = 0$

Il y a, donc, p=7 variables physiques appropriées et q=4 dimensions fondamentales $\Rightarrow$ 7-4=3 groupes sans dimensions, On a alors :

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = o$$

Pour exprimer ces groupements, on suit la même démarche que précédemment :

$$\pi = l^a.\nu^b.(g\beta)^c.(T - T_O)^d.a^e.\lambda^f.\varphi^g$$

Avec l'équation au dimension suivante :

$$[\pi] = [L]^a.\left[L^2T^{-1}\right]^b.\left[LT^{-2}\theta^{-1}\right]^c.[\theta]^d.\left[L^2T^{-1}\right]^e\left[MLT^{-3}\theta^{-1}\right]^f.\left[MT^{-3}\right]^g.$$

On exprime que le nombre π est sans dimensions $\Rightarrow$ un système d'équation à résoudre, ce qui aboutit aux résultats suivants :

$$\pi_1 = \frac{\varphi \ell}{\lambda \Delta T_o} = Nu \qquad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$\pi_2 = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu}{\rho_o} \frac{\rho_o Cp}{\lambda} = \frac{\mu Cp}{\lambda} = \Pr \qquad \text{Nombre de Prandtl.}$$

Puis un nouveau nombre qui caractérise la convection libre.

$$\pi_3 = \frac{\beta g \, \Delta T_o \ell^3}{\nu^2} = Gr \qquad \text{nombre de Grashof}$$

Le nombre *Gr* est le rapport des forces d'Archimède aux forces de viscosité plus *Gr* est grand plus les forces d'Archimède sont importantes ce qui a une influence à mettre le fluide en mouvement. Et l'équation $F(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = o$ s'écrit

$$F(Nu, \Pr, Gr) = o$$

Ou encore

$$Nu = f(Gr, \Pr)$$

Cette relation est une corrélation à déterminer expérimentalement.

Remarque : Le nombre de Reynolds n'apparaît pas en convection naturelle, puisqu'il n'y a pas d'écoulement imposé *(Uo* = o). Mais on peut calculer un nombre de Reynolds *Re* local qui correspond au mouvement induit par les gradients de densité ρ.

2-1-3) ***Limite du théorème des*** π

Le théorème des π *n'est plus applicable lorsque les équations (système d'équation des puissances) où intervient les puissances des variables forment un système linéairement dépendant, c'est à dire, si les équations ne sont pas indépendantes, le nombre des groupes adimensionnels est égal au nombre total des p variables diminué du nombre des équations indépendantes.*

2-1-4) CONCLUSIONS

L'analyse dimensionnelle est une méthode puissante, car, en l'absence d'équation de conservation elle permet de déterminer des groupes adimensionnels qui caractérisent un phénomène physique. Elle a cependant des limites :

-Elle ne renseigne pas sur la nature physique du phénomène.

-Elle ne conduit à des résultats significatifs que si le décompte des grandeurs est exact et complet.

-Elle doit être complétée par une étude expérimentale pour préciser la forme de la relation liant les groupements sans dimension.

V - Étude de quelques cas de convection

Le présent paragraphe a pour but de fournir et commenter les relations adimensionnelles qui sont le plus fréquemment utilisés en pratique. Nous ne pouvons donner ici une énumération exhaustive de toutes les relations adimensionnelles qui ont été déterminées par des essais sur modèle. Les cas traités ne sont donc que des exemples qui permettent de mettre en lumière l'utilisation rationnelle des notions vues dans les paragraphes précédents. Or, ce qui importe en général, c'est de connaître le flux thermique qui passe à la paroi du solide vers le fluide, ou le contraire.

$$\varphi_P = h(T_P - T_M)$$

Avec

T_P : Température de paroi.

T_∞ : Température du fluide loin de la paroi.

T_M : Température moyenne du fluide $T_M = \frac{T_P + T_\infty}{2}$

On est donc en bonne voie pour connaître le coefficient de transfert convectif. On a établi que la connaissance de **h** passe par l'intermédiaire d'un nombre dit de Nusselt dont l'expression, encore à déterminer, n'est fonction que du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl (convection forcée) ou du nombre de Grashof et du nombre de Prandtl (convection naturelle).

Nu = f(Re, Pr)	Convection forcée
Nu = f(Gr, Pr)	Convection libre(naturelle)

En raison de la différence dans les caractéristiques d'écoulements pour les régimes ***laminaire*** et ***turbulent***, nous présentons des corrélations propres à chaque cas.

V-1. Calcul du flux de chaleur par convection forcée

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels.

$$\boldsymbol{Nu = f(Re, Pr)}$$

Définis par :

Nombre de Nusselt $N_u = \dfrac{hd}{\lambda}$

Nombre de Reynolds $R_e = \dfrac{\rho u d}{\mu}$

Nombre de Prandtl $P_r = \dfrac{C_P \mu}{\lambda}$

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue de la manière suivante :

1- Calcul des nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandtl.
2- Suivant la valeur de Reynolds et la configuration $\Rightarrow$ choix de la corrélation.
3- Calcul de Nusselt par application de cette corrélation
4- Calcul de $h = \dfrac{\lambda N_u}{d}$ et de $\varphi = h(T_p - T_\infty)$.

V-2. Calcul du flux de chaleur par convection libre

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels.

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

Définis par :

Nombre de Nusselt $N_u = \dfrac{hd}{\lambda}$

Nombre de Grashof $Gr = \dfrac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2}$

Calcul de Nombre de Prandtl $P_r = \dfrac{C_P \mu}{\lambda}$

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection Naturelle s'effectue de la manière suivante :

1- Calcul des nombres adimensionnels de Grashof et de Prandtl.
2- Suivant la valeur de Grashof et la configuration $\Rightarrow$ choix de la corrélation.
3- Calcul de Nusselt Par application de cette corrélation
4- Calcule de $h = \dfrac{\lambda N_u}{d}$ et de $\varphi = h(T_p - T_\infty)$.

Suivant que l'écoulement est laminaire ou turbulent, nous présentons quelques corrélations propres à chaque cas pour différentes configurations dans les tableaux ci-dessous

CORRÉLATIONS POUR LE CALCUL DU COEFFICIENT DE TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION (Thermique : *Yves JANNOT*)

I- Propriétés physiques de l'eau et de l'air

Propriétés de l'eau à saturation						
θ	ρ	c_p	λ	10^4. μ	10^7. α	Pr
(°C)	(kg/m^3)	(J/kg.°C)	(W/m.°C)	(Pa.s)	(m^2/s)	
0	1002	4218	0,552	17,90	1,31	13,06
20	1001	4182	0,597	10,10	1,43	7,02
40	995	4178	0,628	6,55	1,51	4,34
60	985	4184	0,651	4,71	1,55	3,02
80	974	4196	0,668	3,55	1,64	2,22
100	960	4216	0,680	2,82	1,68	1,74
120	945	4250	0,685	2,33	1,71	1,45
140	928	4283	0,684	1,99	1,72	1,24
160	910	4342	0,680	1,73	1,73	1,10
180	889	4417	0,675	1,54	1,72	1,00
200	867	4505	0,665	1,39	1,71	0,94
220	842	4610	0,652	1,26	1,68	0,89
240	816	4756	0,635	1,17	1,64	0,88
260	786	4949	0,611	1,08	1,58	0,87
280	753	5208	0,580	1,02	1,48	0,91
300	714	5728	0,540	0,96	1,32	1,02

Propriétés de l'air à 1 atm						
θ	ρ	c_p	λ	10^5. μ	10^5. α	Pr
(°C)	(kg/m^3)	(J/kg.°C)	(W/m.°C)	(Pa.s)	(m^2/s)	
0	1,292	1006	0,0242	1,72	1,86	0,72
20	1,204	1006	0,0257	1,81	2,12	0,71
40	1,127	1007	0,0272	1,90	2,40	0,70
60	1,059	1008	0,0287	1,99	2,69	0,70
80	0,999	1010	0,0302	2,09	3,00	0,70
100	0,946	1012	0,0318	2,18	3,32	0,69
120	0,898	1014	0,0333	2,27	3,66	0,69
140	0,854	1016	0,0345	2,34	3,98	0,69
160	0,815	1019	0,0359	2,42	4,32	0,69
180	0,779	1022	0,0372	2,50	4,67	0,69
200	0,746	1025	0,0386	2,57	5,05	0,68
220	0,700	1028	0,0399	2,64	5,43	0,68
240	0,688	1032	0,0412	2,72	5,80	0,68
260	0,662	1036	0,0425	2,79	6,20	0,68
280	0,638	1040	0,0437	2,86	6,59	0,68
300	0,616	1045	0,0450	2,93	6,99	0,68

Corrélations entre 0 et 100 °C

(θ : température en °C , T température en K)

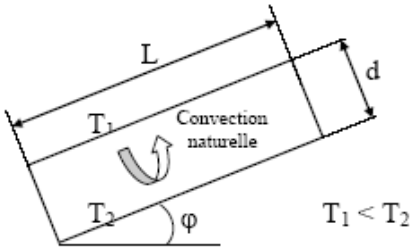
Pour l'air

▪ $\rho = \frac{353}{(\theta + 273)}$	kg m^{-3}	
▪ $c_p = 1008$	J kg^{-1} °C^{-1}	
▪ $\lambda = 7{,}57.10^{-5}\,\theta + 0{,}0242$	W m^{-1} °C^{-1}	$r^2 = 0{,}9999$
▪ $\mu = 10^{-5}\,(0{,}0046\,\theta + 1{,}7176)$	Pa s	$r^2 = 0{,}9997$
▪ $\alpha = 10^{-5}\,(0{,}0146\,\theta + 1{,}8343)$	m^2 s^{-1}	$r^2 = 0{,}9986$
▪ $Pr = -2{,}54.10^{-4}\,\theta + 0{,}7147$		$r^2 = 0{,}9767$
▪ $\beta \approx \frac{1}{T}$	K^{-1}	

Pour l'eau

▪ $\rho = -0{,}00380\,\theta^2 - 0{,}0505\,\theta + 1002{,}6$	kg m^{-3}	$r^2 = 0{,}9982$
▪ $c_p = 4180$	J kg^{-1} °C^{-1}	
▪ $\lambda = -9{,}87.10^{-6}\,\theta^2 + 2{,}238.10^{-3}\,\theta + 0{,}5536$	W m^{-1} °C^{-1}	$r^2 = 0{,}9987$
▪ $\mu = 10^{-4}\,(0{,}00200\,\theta^2 - 0{,}3389\,\theta + 17{,}199)$	Pa s	$r^2 = 0{,}9815$
▪ $\alpha = 10^{-7}\,(-0{,}00360\,\theta + 1{,}340)$	m^2 s^{-1}	$r^2 = 0{,}9734$
▪ $Pr = 1{,}577.10^{-3}\,\theta^2 - 0{,}261\,\theta + 12{,}501$		$r^2 = 0{,}9796$
▪ $\frac{g\beta\rho^2 c_p}{\mu\lambda} = \left(0{,}0105\,\theta^2 + 0{,}477\,\theta - 0{,}0363\right) 10^9$	°C^{-1} m^{-3}	$r^2 = 0{,}9992$
▪ $\log_{10}\left[p_{sat}(T)\right] = 20{,}3182 - \frac{2795}{T} - 3.868\,\log_{10}(T)$	mmHg	-50°C < θ > 200°C
▪ $Lv = 2495 - 2{,}346\,\theta$	kJ.kg^{-1}	0°C < θ < 100°C

II- Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert de chaleur par convection naturelle

Corrélations valables pour tous fluides : Nu = C (Gr Pr)^m			
Géométrie	**Gr Pr**	**C**	**m**
Plaques et cylindres verticaux	10^4 - 10^9 10^9 - 10^{13}	0,59 0,021	1/4 2/5
Cylindres horizontaux	10^{-10} - 10^{-2} 10^{-2} - 10^2 10^2 - 10^4 10^4 - 10^7 10^7 - 10^{12}	0,675 1,02 0,850 0,480 0,125	0,058 0,148 0,188 0,25 0,33
Face supérieure d'une plaque chaude ou face inférieure d'une plaque froide	2.10^4 - 8.10^6 8.10^6 - 10^{11}	0,54 0,15	0,25 0,33
Face inférieure d'une plaque chaude ou face supérieure d'une plaque froide	10^5 - 10^{11}	0,27	0,25
Cellule fermée rectangulaire inclinée 	$Nu = 1+1{,}44\left(1-\frac{1708}{Gr\,Pr\cos\varphi}\right)\left[1-\frac{1708\left(\sin(1{,}8\,\varphi)^{1{,}6}\right)}{Gr\,Pr\cos\varphi}\right]+$ $\left[\left(\frac{Gr\,Pr\cos\varphi}{5830}\right)^{1/3}-1\right]$ si $0<\varphi<\varphi^*$ $Nu=(\sin\varphi)^{1/4}\,Nu(90°)$ si $\varphi^*<\varphi<90°$ $Nu=1+[Nu(90°)-1]\sin\varphi$ si $90°<\varphi<180°$ Avec $\varphi^* = \tan^{-1}(4800\,Pr)$		

Relations simplifiées pour de l'air à pression atmosphérique		
Géométrie	Laminaire 10^4 < Gr Pr > 10^9	Turbulent Gr Pr > 10^9
Plaque ou cylindre vertical	$h=1{,}42\left(\frac{\Delta\theta}{L}\right)^{1/4}$	$h=1{,}31\,(\Delta\theta)^{1/3}$
Cylindre horizontal	$h=1{,}32\left(\frac{\Delta\theta}{D}\right)^{1/4}$	$h=1{,}24\,(\Delta\theta)^{1/3}$
Face supérieure d'une plaque horizontale chaude ou face inférieure d'une plaque froide	$h=1{,}32\left(\frac{\Delta\theta}{L}\right)^{1/4}$	$h=1{,}52\,(\Delta\theta)^{1/3}$
Face inférieure d'une plaque chaude ou face supérieure d'une plaque froide	$h=0{,}59\left(\frac{\Delta\theta}{L}\right)^{1/4}$	$h=0{,}59\left(\frac{\Delta\theta}{L}\right)^{1/4}$

III- Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert de chaleur par convection forcée

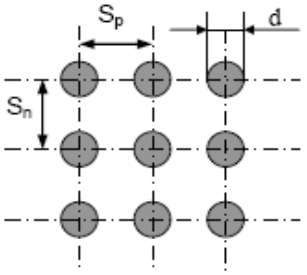
Corrélation : $Nu_{10} = cR_e^n P_r^{1/3}$

Caractéristiques du fluide calculée à $\theta_f = \frac{\theta_p + \theta_\infty}{2}$

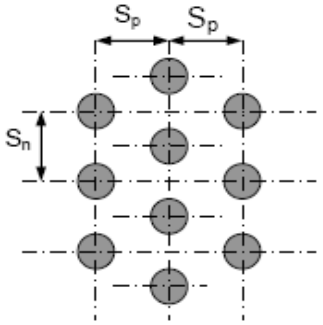
Géométrie | **Corrélation**

Ecoulement perpendiculaire à un faisceau de 10 tubes

	$\frac{S_n}{d}$							
$\frac{S_p}{d}$	1,25		1,5		2,0		3,0	
	C	n	C	n	C	n	C	n
	Disposition en ligne							
1,25	*0,386*	0,592	0,305	0,608	0,111	0,704	0,070	0,752
1,5	0,407	0,586	0,278	0,620	0,112	0,702	0,075	0,744
2,0	0,464	0,570	0,332	0,602	0,254	0,632	0,220	0,648
3,0	0,322	0,601	0,396	0,584	0,415	0,581	0,317	0,608
	Disposition en quinconce							
0,6	-	-	-	-	-	-	0,236	0,636
0,9	-	-	-	-	0,495	0,571	0,445	0,581
1,0	-	-	0,552	0,558	-	-	-	-
1,125	-	-	-	-	0,531	0,565	0,575	0,560
1,25	0,575	0,556	0,561	0,554	0,576	0,556	0,579	0,562
1,5	0,501	0,568	0,511	0,562	0,502	0,568	0,542	0,568



Disposition en ligne



Disposition en quinconce

Ecoulement perpendiculaire à un faisceau de n rangées de tubes (n ≤ 10)

$$N = \frac{h_n}{h_{10}}$$

Nombre rangées	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N en ligne	0,64	0,80	0,87	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	0,99	1,0
N en quinconce	0,68	0,75	0,83	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	1,0

IV- Corrélations pour le calcul des coefficients de transfert de chaleur par convection forcée

Caractéristiques du fluide calculée à $\theta_f = \dfrac{\theta_p + \theta_\infty}{2}$

Géométrie	Corrélation
Ecoulement sur un plan	$Nu(x)$: Nu à la distance x du bord du plan $\overline{Nu_L}$: Nu moyen sur la longueur L du plan Ecoulement turbulent : $Nu(x) = 0{,}0288\ Re(x)^{0,8}\ Pr^{1/3}$ $\overline{Nu_L} = 0{,}035\ Re_L^{0,8}\ Pr^{1/3}$ $\quad Re > 5.10^5$ et $Pr \geq 0{,}5$ Ecoulement laminaire : $Nu(x) = 0{,}324\ Re(x)^{0,5}\ Pr^{1/3}$ $\overline{Nu_L} = 0{,}628\ Re_L^{0,5}\ Pr^{1/3}$ $\quad Re < 5.10^5$ et $10 \geq Pr \geq 0{,}5$
Ecoulement dans un tube	Ecoulement turbulent : $Nu = 0{,}023\ Re^{0,8}\ Pr^n$ $n = 0{,}3$ si $\theta_{fluide} > \theta_{paroi}$ $n = 0{,}4$ si $\theta_{fluide} < \theta_{paroi}$ $\quad Re > 5000$ et $0{,}6 < Pr < 100$ Re calculé pour $D_H = 4S / P$ où : S = section de passage du fluide P = périmètre de contact fluide/paroi Ecoulement laminaire : $Nu = 1{,}86\ (Re\ Pr)^{1/3} \left(\dfrac{D}{L}\right)^{1/3} \left(\dfrac{\mu}{\mu_p}\right)^{0,14}$ Valable pour $Re\ Pr\ \dfrac{D}{L} \geq 10$, μ_p calculé à θ_p
Ecoulement perpendiculaire à un cylindre circulaire	$Nu = C\ Re^n\ Pr^{1/3}$, vitesse u_∞ calculée en amont du tube Re | C | n 0,4 – 4 | 0,989 | 0,330 4 – 40 | 0,911 | 0,385 40 – 4000 | 0,683 | 0,466 4000 – 40000 | 0,193 | 0,618 40000 - 250000 | 0,0266 | 0,805
Ecoulement perpendiculaire à un cylindre non circulaire	Géométrie | Re | C | n $u_\infty \rightarrow$ ▭ d | $5\ 10^3$ - 10^5 | 0,102 | 0,675 $u_\infty \rightarrow$ ▯ d | $4\ 10^3$ – $1{,}5\ 10^4$ | 0,228 | 0,731

V- La convection et la mécanique des fluides

Quelques notions de mécanique des fluides sont nécessaires à une compréhension élémentaire du phénomène de convection à savoir

I- *Rappels des équations de conservation.*

Les équations de conservation décrivant le phénomène de convection sont :

- Equation de conservation de la masse $\rightarrow$Équation de continuité
- Equation de conservation de la quantité de mouvement $\rightarrow$ Equation .de Naviers-Stokes
- Equation de conservation d'énergie $\rightarrow$Equations de Fourier - Kirehhoff

II-1- Equation de continuité.

Cet équation est établi en écrivant la conservation de la masse sur un élément de volume *dV* traversé par un fluide.

$$\begin{bmatrix} accumulation\ de \\ la\quad masse \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} quantité\ de\ masse \\ entrante \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} quantité\ de\ masse \\ sortante \end{bmatrix}$$

$$dV\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho v_x\big|_x dydz - \rho v_x\big|_{x+dx} dydz$$

$$+ \quad \rho v_y\big|_y dxdz - \rho v_y\big|_{y+dy} dxdz$$

$$+ \quad \rho v_z\big|_z dxdy - \rho v_z\big|_{z+dz} dxdy \qquad (1)$$

En divisant par $dV=dxdydz$ et on prend la limite quand $dV \rightarrow$ o,
On obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right]$$

Qu'on peut écrire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}.(\rho\vec{v}) \qquad (2)$$

ou encore

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\vec{\nabla}.\vec{v} \qquad (3)$$

avec $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}$ Dérivée particulaire

II-2- Equation de conservation de la quantité de mouvement

La conservation de la quantité de mouvement sur l'élément de volume élémentaire *dV=dxdydz est :*

$$\begin{bmatrix} accumulation\ de \\ la\ quantité\ de\ mvt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} quantité\ de\ mvt \\ entrante \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} quantité\ de\ mvt \\ sortante \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} action\ des\ forces\ extérieures \\ volumique\ et\ surfaciques \end{bmatrix}$$

Même démarche que précédemment, on obtient :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla}\tau + \rho\vec{g} \qquad (4)$$

Avec

$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$: Forces d'inertie

$\vec{\nabla} p$: Forces de pression

$\vec{\nabla}\tau$: Forces de viscosité

$\rho\vec{g}$: Forces de gravité

avec les hypothèses : $\rho =$ cste fluide incompressible.

et μ = cste

L'équation (4) devient

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu\vec{\nabla}^2\vec{V} + \rho\vec{g} \qquad (5)$$

Rappel : on peut aboutir aux mêmes résultats en utilisant

$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{D}{Dt}(m\vec{V})$ $2^{ième}$ *loi de Newton*

- forces de surface : normale $\rightarrow$ pression

  Tangentielles $\rightarrow$ viscosité

- forces volumiques : généralement des forces de gravité

II-3- Equation de conservation d'énergie

Pour évaluer la quantité de chaleur transmise par convection on doit établir l'équation qui régit la répartition des températures dans le fluide, celle-ci est obtenue par application du 1er principe de la thermodynamique au volume fluide considéré. Comme il s'agit d'un fluide en mouvement, l'énergie emmagasinée dans les particules fluides est transportée par leur mouvement. La quantité transportée dépend de la vitesse des particules fluides. Il faut donc résoudre le problème de la mécanique des fluides (résoudre l'équation de la quantité de mouvement).

$$\Delta E_T = \Delta W + \Delta Q \qquad 1^{er}\ \text{Principe de la thermodynamique} \qquad (6)$$

Soit un domaine fluide D limiter par une surface S. On suit D dans sont mouvement

Le 1er principe de la thermodynamique s'écrit pour D entre l'instant t et t+dt comme suit:

$$dE_T = \delta W + \delta Q$$

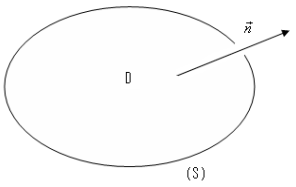
avec $E_T = U + E_C$, sont respectivement énergie interne et énergie cinétique

- La variation d'énergie totale pendant dt est :

$$\frac{d}{dt}\int_D (U+E_C)\rho dv.dt = \int_D \frac{d}{dt}(U+E_C)\rho dv\ dt \tag{7}$$

- ***<u>La quantité de chaleur échange est</u>:***

$$\Delta Q = \left[-\int_S \vec{\varphi}.n\ ds + \int_D q dv\right] dt$$



* $\vec{\varphi}$: flux de chaleur traversant la surface S par conduction d'après la loi de Fourier $\vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{grad T}$, T: température du milieu fluide.
*q : quantité de chaleur produite à l'intérieur du domaine fluide (source, puit)

$$\begin{aligned}\Delta Q &= -\int_D (div\vec{\varphi} - q) dV dt \\ &= \int_D (div\lambda \overrightarrow{grad T} + q) dV\ dt\end{aligned} \tag{8}$$

- ***<u>Travaux des forces extérieures</u>***

$$\Delta W = \Delta W_s + \Delta W_m$$

* ΔW_s : Travaux des Forces de surface $= \int_S \vec{T} dS.\vec{U} dt$

* ΔW_m : Travaux des forces volumiques par unité de masse $= \int_D \overrightarrow{F_{ext}}.\vec{U} dt \rho dV$

C'est-à-dire,

$$\Delta W = \int_S \vec{T} dS.\vec{U} dt + \int_D \overrightarrow{F_{ext}}.\vec{U} dt \rho dV \tag{9}$$

$\vec{T}$: force par unité de surface (Tenseur des contraintes)
avec les composantes du tenseur $T_i = \sigma_{ij}\eta_j$ (notation d'après la convention d'Einstein)

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu div\vec{u}\ \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Compte tenu des équations (7), (8) et (9) l'équation d'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_D \frac{d}{dt}(U+E_C)\rho dV\ dt &= \int_S \sigma_{ij} n_j U_i dS\ dt + \int_D \rho F_i U_i dV\ dt \\ &+ \int_D (div\lambda \overrightarrow{grad T} + q) dV\ dt\end{aligned} \tag{10}$$

pour une écriture simple de l'équation (10) on utilise l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous la forme :

$$\rho \frac{dU_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{11}$$

(Application du théorème de l'énergie cinétique)

En multipliant l'équation (11) par U_i et on l'intègre sur le domaine D on obtient :

$$\int_D \rho U_i \frac{dU_i}{dt}.dV = \int_D \rho U_i F_i \; dV + \int_D U_i \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV$$

Que nous pouvons écrire encore

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \frac{d\vec{U}^2}{dt} \rho dV &= \int_D \rho U_i F_i \; dV + \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i \sigma_{ij}) dV - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \\ &= \int_D \rho U_i F_i \; dV + \int_S U_i \sigma_{ij} \eta_j dS - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \\ &= \Delta W_m / dt + \Delta W_s / dt - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \end{aligned}$$

En introduisant cette équation dans l'équation d'énergie (10) on obtient :

$$\int_D \frac{d}{dt}(U) \rho dV = \int_D (div \lambda \overrightarrow{grad} T + q) dV + \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dV \tag{12}$$

Relation valable quel que soit D, donc

$$\rho \frac{dU}{dt} = div \lambda \overrightarrow{grad} T + q + \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{13}$$

avec

$$\sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -p div \vec{U} - \frac{2}{3} \mu (div \vec{U})^2 + 2 \mu \varepsilon_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{14}$$

* $-p div \vec{U}$: effet de la force de pression processus réversible

* $\phi = -\frac{2}{3} \mu (div \vec{U})^2 + 2 \mu \varepsilon_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$: fonction de dissipation processus irréversible. (Frottement visqueux au sein du fluide c'est une dégradation de l'énergie cinétique en chaleur).

Pour un fluide incompressible $(\rho = cste) \Rightarrow div \vec{U} = 0$ et compte tenu de (14) l'équation d'énergie (13) devient :

$$\rho \frac{dU}{dt} = div \lambda \overrightarrow{grad} T + q + 2 \mu \varepsilon_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{15}$$

Soit $H = U + \frac{P}{\rho}$ fonction enthalpie de l'unité de masse

$$\text{U = H - } U = H - \frac{P}{\rho}$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho \frac{dH}{dt} - \rho \frac{d}{dt}(P / \rho)$$

En reportant ce résultat dans l'équation (15) on obtient :

$$\rho\frac{dH}{dt} = div(\lambda\overrightarrow{gradT}) + q + \rho\left[\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt} + \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}\right] + 2\mu\varepsilon_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \tag{16}$$

pour un fluide incompressible $(\rho = cste)$, $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow div\vec{U} = 0$ et l'équation (16) devient :

$$\rho\frac{dH}{dt} = div(\lambda\overrightarrow{gradT}) + q + \frac{dP}{dt} + 2\mu\varepsilon_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

La thermodynamique fournit les relations suivantes :

$$H = H(P,T) \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dt}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = Cp \quad et \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \text{ Relation de Maxwell}$$

Avec $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P$ coefficient de dilatation volumique à pression constante.

La dérivée de H par rapport à la pression devient : $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\rho}(1 - \beta T)$

Finalement l'équation (16) s'écrit :

$$\rho C_p\frac{dT}{dt} = div(\lambda\overrightarrow{gradT}) + \beta T\frac{dP}{dt} + q + \phi \tag{17}$$

Si $\mu = cste$, $\lambda = cste$, $\rho = cste$ le fluide est Newtonien, et q = 0 (sans source de chaleur)
L'équation de conservation d'énergie s'écrit dans ce cas :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho C_p}\Delta T = a\Delta T \tag{18}$$

avec $a = \frac{\lambda}{\rho c_P}$ diffusivité Thermique

Les autres équations de conservations deviennent :

Equation de continuité

$$div\vec{U} = 0 \tag{19}$$

Équation de Navier Stokes

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \mu\Delta U_i \tag{20}$$

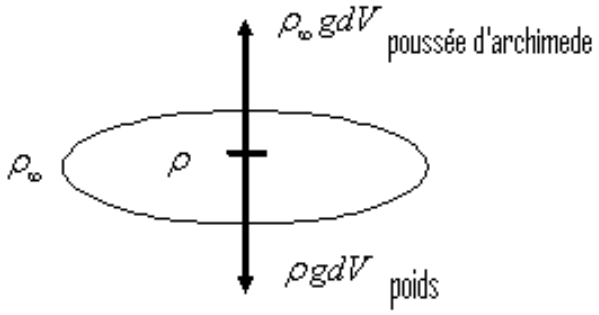
avec $P^* = P + \rho g x_i \delta_{iz}$

En présence de la convention libre la densité du fluide devient une fonction de la température $\rho = \rho(T)$, une particule fluide de volume dV dans un domaine fluide D est soumise aux forces suivantes :

- le poids $\rho g dV$
- la poussée d'Archimède $\rho_\infty g dV$

dont la résultante est

$$F = (\rho_\infty - \rho) g dV$$



Dans le cadre de l'approximation de BOUSSENESQ $\rho = cst = \rho_\infty$ sauf dans le terme $\rho g \Delta V$ (poids du fluide), les équations de conservation s'écrivent :

- *continuité*

$$div\,\vec{u} = o \tag{21}$$

- *équation de Navier-stokes*

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} g\,\delta_{iz} + \upsilon \Delta U_i \tag{22}$$

- *équation de l'énergie*

$$\frac{dT}{dt} = a\,\Delta T \tag{23}$$

- lorsque λ, ρ, Cp = cste $\Rightarrow$ équation de l'énergie est linéaire.
- Si le fluide est au repos (en équilibre dynamique) $\Rightarrow$ équation de Fourier pour l'équation d'énergie (conduction pur)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho Cp}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}\right)\right) + q \tag{24}$$

Université Abdelmalek Essâadi
Faculté des Sciences
Département de Physique
Tétouan

Année : 2017/2018

Filière L.P.ENR

Convection : exercices

Exercice 1 :

De l'air à faible pression circule le long d'une plaque dont la température *Tp* est imposée. On donne :

- $T_\infty = 300°C, \quad U_\infty = 10m/s, \quad p_\infty = 6.10^3 Pa.$
- La longueur de la plaque est *L=0.5m.*

Calculer, par unité de longueur de la paroi, le flux total de refroidissement nécessaire pour maintenir la plaque à la température $T_P = 27°C$.

Exercice 2 :

Calculer le coefficient de convection forcée pour l'eau s'écoulant avec une vitesse moyenne de 2m/s à l'intérieur d'un tuyau de 6 m de longueur et 14 mm de diamètre intérieur. La température de la paroi interne (imposée par le phénomène extérieur) est de 60°C. La température moyenne de l'eau est estimée à 30°C.

Exercice 3 :

De l'air atmosphérique à 10°C passe transversalement à l'axe d'un faisceau de tubes en ligne comprenant 5 rangs de 20 tubes de 5m de longueur. La vitesse de l'air est de 6m/s avant de pénétrer dans le faisceau. Les tubes sont chauffés intérieurement par de l'eau chaude et on peut considérer que la paroi extérieure est à 65°C.

On donne : diamètre des tubes 25 mm ; maille carrée de 38mm*38mm/

Calculer le coefficient de convection.

Exercice 4 :

De la vapeur d'eau à 2 bars se condense à l'intérieur d'un tuyau horizontal en cuivre de 25 mm de diamètre extérieur. Le métal du tuyau étant bon conducteur, on peut admettre que la paroi externe du tuyau est à une température t_{sat} = 120°C (P=2 bar). Ce tuyau est placé dans l'air atmosphérique calme à 20°C.

a) Calculer le coefficient de convection.

b) Calculer le flux linéique transmis à l'air par convection.

Exercice 5 :

Une plaque verticale est chauffée sur une face par de la vapeur à une température de 90°C. L'autre face est en contact avec de l'air à 20°C**.**

Calculer le coefficient de convection.

Exercice 6 :

On considère un écoulement d'eau dans un tube de diamètre intérieur D et de longueur L=1m avec une température moyenne de 60°C et un débit constant Qv =1.8 10-4m3s-1.

1-Calculer le nombre Reynolds pour les différents diamètres (D =10, 20, 30, 40, 50) mm.

2-Donner l'expression du coefficient de convection h en fonction de diamètre D et de propriétés physiques du fluide.

3-Pour les différents diamètres du tube (D =10, 20, 30, 40, 50) mm calculer le coefficient de convection h.

Données :

Pour un régime turbulent (Re>510 3), le nombre de Nusselt est donné par la relation :

$$Nu = 0.020\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.3}$$

Pour un régime laminaire, on applique la relation :

$$Nu = 1.86(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr})^{1/3}(\frac{D}{L})^{1/3}$$

Les propriétés physiques de l'eau à la température moyenne de 60°C sont données par:

$$\rho = 983\,kg.m^{-3} \quad , \quad \lambda = 0.564\,kcal.h^{-1}.°C^{-1}$$

$$\mu = 0.4710^{-3}\,kg.m^{-1}.s^{-1} \quad , \quad C_P = 1 kcal.kg^{-1}.°C^{-1}$$

Exercice 7 :

Un fil électrique en aluminium à section circulaire (diamètre d=1,5mm) et de résistivité ρ_e=0,035 Ωmm^2m^{-1}, parcouru par un courant électrique I, sa température est de T_{fil}=75°C. Il est refroidi dans un jet d'air sec perpendiculaire à son axe de révolution. La vitesse de l'air loin de surface de fil est égale à u=1,2 ms^{-1}. La température de l'air est T_{air}=25°C.

a- Déterminer le coefficient de convection h.
b- Quel est le flux de chaleur ϕ par unité de longueur du fil échangé avec l'air.
c- Déterminer l'intensité du courant électrique maximale si la température du fil ne doit pas dépasser T_{fil}=75°C.

On donne :

$$Nu_d = C\,Re_d^m Pr^{0.33}$$

Re	*C*	*m*
4-40	*0.911*	*0.385*
40-4000	*0.683*	*0.466*
4000-40000	*0.193*	*0.618*

Les paramètres thermodynamique de l'air à 50°C sont :

- ✓ Conductivité thermique de l'air λ_{air}=0.0283$Wm^{-1}K^{-1}$
- ✓ Viscosité cinématique se l'air υ_{air} =17.95 $10^{-6}m^2s^{-1}$
- ✓ Nombre de Prandtl de l'air Pr_{air} =0.698

Le flux de chaleur générée par effet joule dans une longueur ℓ du fil parcouru par un courant I est donné par :

$$\phi = I^2(4\rho_e \ell / \pi d^2)$$